

<http://www.ksi.mff.cuni.cz/~svoboda/courses/241-BI-AAG/>

Cvičení

BI-AAG.21: Automaty a gramatiky

2024/25 ZS

Martin Svoboda

martin.svoboda@fit.cvut.cz

České vysoké učení technické v Praze, Fakulta informačních technologií

Formální jazyky

Základní pojmy

Gramatiky

Chomského hierarchie

Jazykové operace nad gramatikami

Derivační stromy

Gramatiky

Gramatika je čtveřice $G = (N, T, P, S)$, kde

- N je **množina neterminálů**
- T je **množina terminálů**
 - $N \cap T = \emptyset$
- P je **množina přepisovacích pravidel**
 - Každé je ve tvaru $\alpha X \beta \rightarrow \gamma$, kde $\alpha, \beta, \gamma \in (N \cup T)^*$, $X \in N$
- $S \in N$ je **startovní neterminál**

Chomského hierarchie

Třída 0: rekurzivně spočetné jazyky: TS, NG:

- $\alpha X \beta \rightarrow \gamma$, kde $\alpha, \beta, \gamma \in (N \cup T)^*$, $X \in N$

Třída 1: kontextové jazyky: LOTS, KG:

- $\alpha X \beta \rightarrow \alpha \delta \beta$, kde $\alpha, \beta \in (N \cup T)^*$, $X \in N$, $\delta \in (N \cup T)^+$
- $S \rightarrow \varepsilon, \dots$

Třída 2: bezkontextové jazyky: ZA, BG:

- $X \rightarrow \gamma$, kde $X \in N$, $\gamma \in (N \cup T)^*$

Třída 3: regulární jazyky: KA, RG:

- $X \rightarrow aY$, kde $X, Y \in N$, $a \in T$
- $X \rightarrow a$, kde $X \in N$, $a \in T$
- $S \rightarrow \varepsilon, \dots$

Příklad 1

Intuitivní návrh gramatik

Navrhňte gramatiky pro následující jazyky nad abecedou

$$\Sigma = \{a, i, o, y, n\}$$

- $L_1 = \{on, ona, ono\}$
- $L_2 = \{oni, ony\}$

Příklad 2

Jazykové operace nad BG

Zkonstruujte gramatiky pro následující jazyky

- $L_3 = L_1 \cup L_2$ (sjednocení jazyků)
- $L_4 = L_1 \cdot L_2$ (součin jazyků)
- $L_5 = L_1^*$ (iterace jazyka)

Příklad 3

Derivační stromy

Mějme následující bezkontextovou gramatiku

$$G = (\{A, B, C\}, \{0, 1\}, P, A)$$

s postupně očíslovanými přepisovacími pravidly (1 až 7)

$$A \rightarrow 0BB1 \mid A0A$$

$$B \rightarrow \varepsilon \mid 1CA$$

$$C \rightarrow AB \mid 0 \mid 1$$

Zkonstruuje derivační strom pro větu 011011 vygenerovanou pomocí derivace $A \xRightarrow{1} 0BB1 \xRightarrow{4} 01CAB1 \xRightarrow{1} 01C0BB1B1 \xRightarrow{3}$

$01C0B1B1 \xRightarrow{7} 0110B1B1 \xRightarrow{3} 0110B11 \xRightarrow{3} 011011$

Intuitivní návrh gramatik

Regulární gramatiky

Bezkontextové gramatiky

Kontextové gramatiky

Neomezené gramatiky

Příklad 1

Intuitivní návrh gramatik

Navrhněte gramatiky pro následující jazyky

- $L_{1.1} = \{w \mid w \in \{0, 1\}^*, w \text{ je binární zápis sudého čísla}\}$
- $L_{1.2} = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, |w|_b = 3k, k \in \mathbb{N}_0, k \geq 0\}$
- $L_{1.3} = \{w \mid w \in \{0, 1\}^*, \text{za každým symbolem 1 následují alespoň dva symboly 0}\}$
- $L_{1.4} = \{u^3v \mid u \in \{a, b\}, v \in \{c, d\}^*, 0 < |v| < 3\}$
- $L_{1.5} = \{w \mid w \in \{0, 1\}^*, w \text{ obsahuje stejný počet řetězců 01 a 10}\}$

Příklad 2

Intuitivní návrh gramatik

Navrhňte gramatiky pro následující jazyky

- $L_{2.1} = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, w \text{ začíná na podřetězec baba}\}$
- $L_{2.2} = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, w \text{ končí na podřetězec baba}\}$
- $L_{2.3} = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, w \text{ obsahuje podřetězec baba}\}$
- $L_{2.4} = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, w \text{ obsahuje podsekvenci baba}\}$

Příklad 3

Intuitivní návrh gramatik

Navrhněte gramatiky pro následující jazyky

- $L_{3.1} = \{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}_0, i \geq 0\}$
- $L_{3.2} = \{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}_0, 3 \geq i \geq 0\}$
- $L_{3.3} = \{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}_0\} \cap \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, |w| > 2\}$
- $L_{3.4} = \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}_0, i \geq j \geq 0\}$
- $L_{3.5} = \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}_0, i \neq j\}$
- $L_{3.6} = \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}_0, 3i \neq 2j\}$
- $L_{3.7} = \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}_0, 1 \leq j \leq i \leq 2j\}$

Příklad 4

Intuitivní návrh gramatik

Navrhněte gramatiky pro následující jazyky

- $L_{4.1} = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\} \cup \{w \mid w \in \{a, b\}^*, w = w^R\}$
- $L_{4.2} = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \in \mathbb{N}, i + k = j\}$
- $L_{4.3} = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \in \mathbb{N}_0, j + k > i\}$
- $L_{4.4} = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \in \mathbb{N}_0, i \geq j, k = i - j\}$
- $L_{4.5} = \{ucv \mid u, v \in \{a, b\}^*, |u|_a < |v|_b\}$
- $L_{4.6} = \{a^i b^j c^k d^l \mid i, j, k, l \in \mathbb{N}_0, i + j = k + l\}$
- $L_{4.7} = \{a^{m \bmod 2} b^{3m+1} c^n d^{2(n-m)} \mid m, n \in \mathbb{N}_0, m \leq n\}$

Příklad 5

Intuitivní návrh gramatik

Navrhněte gramatiky pro následující jazyky

- $L_{5.1} = \{a^i b^i c^i \mid i \in \mathbb{N}_0, i \geq 0\}$
- $L_{5.2} = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$

Intuitivní návrh KA

Konečné automaty

Deterministický konečný automat je pětice $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$,
kde

- Q je množina stavů
- Σ je vstupní abeceda
- δ je přechodová funkce: $Q \times \Sigma \rightarrow Q$
- $q_0 \in Q$ je počáteční stav
- $F \subseteq Q$ je množina koncových stavů

Příklad 1

Intuitivní návrh DKA

Navrhněte konečné automaty pro následující jazyky

- $L_{1.1} = \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}_0, i > 1, j \geq 0\}$
- $L_{1.2} = \{on, ona, ono\}$
- $L_{1.3} = \{w \mid w \in \{0, 1\}^*, w \text{ je binární zápis sudého čísla}\}$
- $L_{1.4} = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, |w|_b = 4k + 1, k \in \mathbb{N}_0, k \geq 0\}$
- $L_{1.5} = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, w \text{ začíná a končí na stejný symbol}\}$

Konečné automaty

Nedeterministický konečný automat je pětice $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, kde

- Q je množina stavů
- Σ je vstupní abeceda
- δ je **přechodová funkce**: $Q \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Q)$
- $q_0 \in Q$ je počáteční stav
- $F \subseteq Q$ je množina koncových stavů

Příklad 2

Intuitivní návrh DKA a NKA

Navrhněte konečné automaty pro následující jazyky

- $L_{2.1} = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, w \text{ obsahuje podsekvenci } aab\}$
- $L_{2.2} = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, w \text{ začíná na podřetězec } baba\}$
- $L_{2.3} = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, w \text{ končí na podřetězec } baba\}$
- $L_{2.4} = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, w \text{ obsahuje podřetězec } baba\}$

Příklad 3

Intuitivní návrh DKA

Navrhňte konečné automaty pro následující jazyky

- $L_{3.1} = \{w \mid w \in \{0, 1\}^*, w \text{ je binární číslo dělitelné } 3_{10}\}$
- $L_{3.2} = \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}_0, i = j \bmod 2\}$
- $L_{3.3} = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, |w|_a \bmod 2 \neq |w|_b \bmod 2\}$
- $L_{3.4} = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, |w|_a \geq 2, |w|_b < 2\}$
- $L_{3.5} = \{w \mid w = u011v, |w| = 2k, k \in \mathbb{N}_0, u, v \in \{0, 1\}^*\}$

Úpravy konečných automatů

Dosažitelné a nedosažitelné stavy

Užitečné a zbytečné stavy

NKA s epsilonovými přechody

NKA s více počátečními stavy

Příklad 1

Dosažitelné a nedosažitelné stavy

Odstraňte nedosažitelné stavy z následujícího konečného automatu

		a	b
→	0	{1}	
←	1	{5,6}	{0,1}
	2		
	3	{2}	{1}
←	4		{3}
	5		{6}
←	6	{2,6}	{6}

Příklad 2

Užitečné a zbytečné stavy

Odstraňte zbytečné stavy z následujícího konečného automatu

		a	b
→	0	{1}	
←	1	{0,3}	{2}
	2		{3}
	3		
	4	{4}	{5}
←	5	{5}	
	6	{4}	{2,3}

Konečné automaty

Nedeterministický konečný automat s ε -přechody je pětice $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, kde

- Q je množina stavů
- Σ je vstupní abeceda
- δ je **přechodová funkce**: $Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow \mathcal{P}(Q)$
- $q_0 \in Q$ je počáteční stav
- $F \subseteq Q$ je množina koncových stavů

Příklad 3

NKA s epsilon přechody

Odstraňte ε přechody z následujícího konečného automatu

		a	b	ε
→	0	{0,4,5}		{1,2}
	1		{2}	
	2	{2}	{3,6}	{4}
←	3		{3}	
←	4	{3}		{3}
	5	{6}		
	6	{6}		{4}

Příklad 4

NKA s epsilon přechody

Odstraňte ε přechody z následujícího konečného automatu

		a	ε
→	0	{3}	{1}
	1	{4}	{2}
	2	{5}	
	3		{1}
	4		{2}
←	5		

Příklad 5

NKA s epsilon přechody

Odstraňte ε přechody z následujícího konečného automatu

		0	1	ε
→	A		{I}	{C,I}
	B	{I}	{B,F}	{E}
←	C	{H}	{E,F}	
←	D	{B,E}	{C,D,G}	{B,C,D,G}
	E	{B}	{B}	{D}
	F		{A,G}	{D}
	G	{A,B}	{B}	
←	H	{G}	{A,C}	{C}
	I	{E,H}	{F}	{C}

Konečné automaty

Nedeterministický konečný automat s více počátečními stavy je pětice $M = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$, kde

- Q je množina stavů
- Σ je vstupní abeceda
- δ je přechodová funkce: $Q \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Q)$
- $I \subseteq Q$ je množina počátečních stavů
- $F \subseteq Q$ je množina koncových stavů

Příklad 6

NKA s více počátečními stavy

Převeďte následující NKA s více počátečními stavy na ekvivalentní NKA jen s jedním počátečním stavem

		0	1	2
$\leftrightarrow$	A		{A,D}	{B,D}
$\leftarrow$	B	{A,D}	{B}	{D}
$\rightarrow$	C	{B}		{C,D}
	D		{B,C}	{A}
$\rightarrow$	E	{B}	{D}	{}

Determinizace NKA

Příklad 1

Determinizace NKA

Pro následující NKA vytvořte ekvivalentní DKA

		a	b
$\leftrightarrow$	0	$\{0,2\}$	$\{1\}$
	1		$\{1,3\}$
$\leftarrow$	2	$\{4\}$	
	3	$\{0\}$	$\{1,2,3\}$
	4	$\{2,4\}$	$\{\}$

Příklad 2

Determinizace NKA

Pro následující NKA vytvořte ekvivalentní DKA

		0	1	2
$\leftrightarrow$	A	{B}	{D}	{C}
$\leftarrow$	B	{D}	{B}	{D}
$\rightarrow$	C	{C}	{A}	{D}
	D	{B}	{B}	{A}

Minimalizace DKA

Příklad 1

Minimalizace DKA

Pro následující DKA vytvořte ekvivalentní minimální DKA

		0	1	2
$\leftrightarrow$	A	D	H	H
$\leftarrow$	B	A	B	B
	C	A	E	G
	D		F	C
$\leftarrow$	E	A	E	G
$\leftarrow$	F	J	A	E
$\leftarrow$	G	A	G	B
	H		F	C
	I	K	H	I
$\leftarrow$	J	A	J	E
	K	A	A	F

Příklad 1

Minimalizace DKA

Ověřte izomorfismus výsledného automatu vůči následujícímu DKA

		0	1	2
←	S	V	S	S
	T	S		V
	U	V	S	S
↔	V	W	W	W
	W		T	U

Příklad 2

Minimalizace DKA

Pro následující DKA vytvořte ekvivalentní minimální DKA

		0	1
→	A	B	F
	B	G	C
←	C	A	I
	D	C	G
	E	H	F
	F	I	G
	G	G	E
	H	G	I
←	I	E	C

Příklad 3

Minimalizace DKA

Pro následující DKA vytvořte ekvivalentní minimální DKA

		0	1
←	A	B	C
	B	D	A
→	C		I
←	D		I
←	E	J	H
←	F	F	F
	G		J
	H	D	A
	I	E	A
	J	J	G

Jazykové operace nad KA

Sjednocení: počáteční stavy, epsilonové přechody, paralelní běh

Průnik: paralelní běh

Doplňěk

Součin: epsilonové přechody, bez epsilonových přechodů

Iterace: epsilonové přechody, bez epsilonových přechodů

Příklad 1

Jazykové operace nad KA

Mějme následující konečné automaty přijímající jazyky L_1 resp. L_2

		0	1
$\leftrightarrow$	A	{B}	{B}
	B		{B,C}
$\leftarrow$	C	{C}	{C}

		0	1
$\rightarrow$	D	{E}	{D,F}
	E	{F}	{E}
$\leftarrow$	F	{F}	{F}

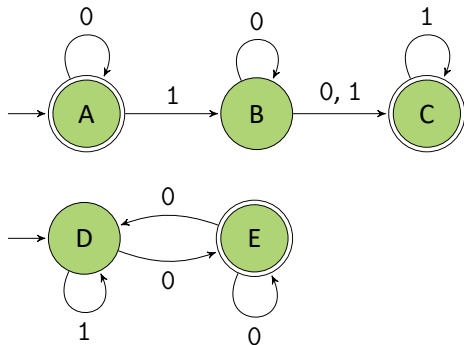
Zkonstruuje konečné automaty pro následující jazyky

- $L_1 \cup L_2$
- $L_1 \cap L_2$
- $\overline{L_1}$
- $L_1 \cdot L_2$
- $(L_2)^*$

Příklad 2

Jazykové operace nad KA: Sjednocení a průnik

Mějme následující konečné automaty přijímající jazyky L_3 resp. L_4

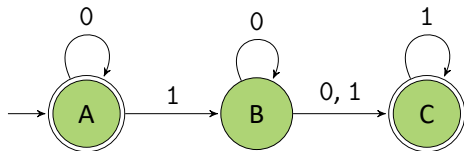


Zkonstruujte konečné automaty pro jazyky $L_3 \cup L_4$ a $L_3 \cap L_4$

Příklad 3

Jazykové operace nad KA: Doplněk

Mějme následující konečný automat přijímající jazyk L_3

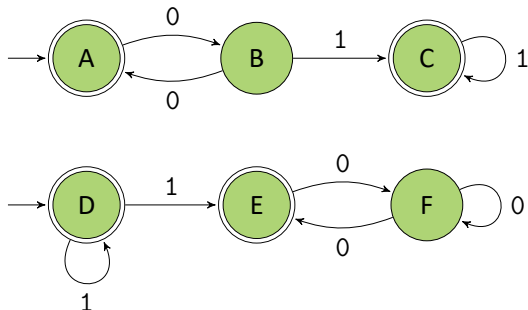


Zkonstruuje konečný automat pro jazyk $\overline{L_3}$

Příklad 4

Jazykové operace nad KA: Součin

Mějme následující konečné automaty přijímající jazyky L_5 resp. L_6

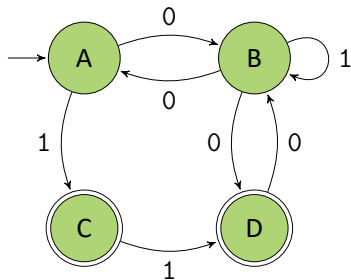


Zkonstruujte konečný automat pro jazyk $L_5 \cdot L_6$

Příklad 5

Jazykové operace nad KA: Iterace

Mějme následující konečný automat přijímající jazyk L_7



Zkonstruujte konečný automat pro jazyk $(L_7)^*$

Regulární výrazy

Intuitivní návrh RV

Zjednodušování RV

Regulární rovnice

Soustavy regulárních rovnic

Regulární výrazy

Regulární výraz nad abecedou Σ

- a pro každé $a \in \Sigma$
- ε
- $\emptyset$
- **Alternativa** $(r_1 + r_2)$, kde r_1 a r_2 jsou RV
- **Zřetězení** $(r_1 \cdot r_2)$, kde r_1 a r_2 jsou RV
- **Iterace** r^* , kde r je RV

Regulární výrazy

Jazyk regulárního výrazu r nad abecedou Σ

- $L(a) = \{a\}$
- $L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$
- $L(\emptyset) = \{\}$
- $L(r_1 + r_2) = L(r_1) \cup L(r_2)$
- $L(r_1 \cdot r_2) = L(r_1) \cdot L(r_2)$
- $L(r^*) = (L(r))^*$

Příklad 1

Intuitivní návrh RV

Navrhňte regulární výrazy pro následující jazyky

- $L_{1.1} = \{w \mid w \in \{0, 1\}^*, w \text{ obsahuje } 0110\}$
- $L_{1.2} = \{w \mid w \in \{0, 1\}^*, |w| = 3k + 1, k \in \mathbb{N}_0\}$
- $L_{1.3} = \{w \mid w \in \{0, 1\}^*, |w|_1 \geq 3\}$
- $L_{1.4} = \{w \mid w \in \{0, 1\}^*, w \text{ má sudý počet symbolů } 0\}$
- $L_{1.5} = \{u^3v \mid u \in \{a, b\}, v \in \{c, d\}^*, 0 < |v| < 3\}$
- $L_{1.6} = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, w \text{ začíná a končí na stejný symbol}\}$
- $L_{1.7} = \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}_0, i = j \bmod 2\}$
- $L_{1.8} = \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}_0, (i + j) \bmod 3 = 1\}$

Příklad 2

Zjednodušování RV

Zjednodušte následující regulární výrazy

- $r_{2.1} = 0^*(0^* + 1^*)$
- $r_{2.2} = 11^* + 0^*0 + \varepsilon$
- $r_{2.3} = 0^*(1 + \varepsilon)0^*(0 + 1)^*$
- $r_{2.4} = 11(11)^* + 11\emptyset + (11 \cdot \emptyset^* + 00)^*(\varepsilon + 1(1 + (11)^*100)) + 00$

Příklad 3

Regulární rovnice

Vyřešte následující regulární rovnice

- $X = 01X + 1$
- $X = X1 + X01 + 2$
- $X = (0^*1 + 1) \cdot (X + 1)$
- $X = X + X(1 + 0^*1 + \varepsilon)$

Příklad 4

Soustavy regulárních rovnic

Vyřešte následující soustavy regulárních rovnic

- $X = 01^*Y + 0X + 0$
 $Y = 1X + 1$
- $X = X0 + Y1 + 2^*$
 $Y = X01 + Y1 + 0$
- $X = 01X + 1^*Y + 01$
 $Y = 101Y + 1X + 0$

Příklad 5

Soustavy regulárních rovnic

Vyřešte následující soustavy regulárních rovnic

- $X = 0X + 1Y$
 $Y = 1^*Z$
 $Z = 0X + 1Y + 0^*1^*Z + \varepsilon$
- $X = (01^* + 1)X + Y$
 $Y = 11 + 1X + 00Z$
 $Z = \varepsilon + X + Y$

Převody mezi KA, RG a RV

RG $\rightarrow$ KA: přímá transformace

KA $\rightarrow$ RG: přímá transformace

RV $\rightarrow$ KA: sousedé

KA $\rightarrow$ RV: pravé regulární rovnice

RG $\rightarrow$ RV: pravé regulární rovnice

RV $\rightarrow$ RG: postupná konstrukce

Příklad 1

Převod RG $\rightarrow$ KA

Převeďte následující regulární gramatiku

$$(\{S, A, B\}, \{a, b, c\}, P, S)$$

s přepisovacími pravidly

$$S \rightarrow aA \mid bB \mid \varepsilon$$

$$A \rightarrow aA \mid aB \mid c$$

$$B \rightarrow cA \mid b$$

na ekvivalentní konečný automat

Příklad 2

Převod KA $\rightarrow$ RG

Převeďte následující automat na ekvivalentní regulární gramatiku

		0	1	2
$\leftrightarrow$	S	{S,A}	{B}	{}
	A	{B}	{C}	{A}
	B		{S}	{C}
$\leftarrow$	C	{C}	{}	

Příklad 3

Převod RV $\rightarrow$ KA

Převeďte následující regulární výraz

$$(a + b)^* \cdot (\emptyset^* + \varepsilon) \cdot ab$$

na ekvivalentní konečný automat

Použijte metodu sousedů

Příklad 4

Převod KA $\rightarrow$ RV

Převeďte následující automat na ekvivalentní regulární výraz

		0	1	2
$\leftrightarrow$	A	{A}	{B}	{B}
$\leftarrow$	B	{B}		

Použijte metodu pravých regulárních rovnic

Příklad 5

Převod RG $\rightarrow$ RV

Převeďte následující regulární gramatiku

$$(\{S, A\}, \{0, 1, 2\}, P, S)$$

s přepisovacími pravidly

$$S \rightarrow 0S \mid 1A \mid 1$$

$$A \rightarrow 2A \mid 0$$

na ekvivalentní regulární výraz

Použijte metodu pravých regulárních rovnic

Příklad 6

Převod RV $\rightarrow$ RG

Převeďte následující regulární výraz

$(00 + 11)^*$

na ekvivalentní regulární gramatiku

Použijte metodu postupné konstrukce

Důkazy neregularity

Pumping lemma

Regulární jazyky

Myhillova-Nerodova věta

Uzávěrové vlastnosti

Pumping lemma

Pumping lemma

- Necht' L je jazyk nad abecedou Σ . Pak platí:
 L je regulární $\Rightarrow \exists p \in \mathbb{N} : \forall w \in L, |w| \geq p : \exists x, y, z \in \Sigma^*,$
 $w = x.y.z, |y| \geq 1, |x.y| \leq p : \forall k \in \mathbb{N}_0 : x.y^k.z \in L$

Obměna PL

- Necht' L je jazyk nad abecedou Σ . Pak platí:
 $\forall p \in \mathbb{N} : \exists w \in L, |w| \geq p : \forall x, y, z \in \Sigma^*, w = x.y.z, |y| \geq 1,$
 $|x.y| \leq p : \exists k \in \mathbb{N}_0 : x.y^k.z \notin L \Rightarrow L$ není regulární

Příklad 1

Pumping lemma

Rozhodněte, zda následující jazyky jsou, nebo nejsou regulární

- $L_{1.1} = \{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}_0, i \geq 0\}$
- $L_{1.2} = \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}_0, 0 \leq i \leq j\}$
- $L_{1.3} = \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}_0, i > j \geq 0\}$
- $L_{1.4} = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$
- $L_{1.5} = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \in \mathbb{N}_0, i, k \geq 0, j \geq 2, i + k = j\}$
- $L_{1.6} = \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}_0, 0 \leq i \leq 2j\}$
- $L_{1.7} = \{a w w \mid w \in \{b, c\}^*\}$

Příklad 2

Pumping lemma

Rozhodněte, zda následující jazyky jsou, nebo nejsou regulární

- $L_{2.1} = \{a^i w \mid i \in \mathbb{N}_0, i > 1, w \in \{b, c\}^*, 2|w|_b = 3|w|_c\}$
- $L_{2.2} = \{a^m b^n c^{2n} \mid m, n \in \mathbb{N}_0, m + n > 1\}$
- $L_{2.3} = \{a^{i^2} \mid i \in \mathbb{N}_0, i \geq 0\}$
- $L_{2.4} = \{va^i w \mid i \in \mathbb{N}_0, i \geq 0, v, w \in \{a, b\}^*, |v| = 2|w|\}$
- $L_{2.5} = \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}_0, i, j \geq 0, i \neq j\}$

Příklad 3

Regulární jazyky

Rozhodněte, zda následující jazyky jsou, nebo nejsou regulární

- $L_{3.1} = \{a^n \mid n \text{ je prvočíslo}\} \cap \{a^n \mid n \in \mathbb{N}_0, n < 6\}$
- $L_{3.2} = \{a^n \mid n \text{ je prvočíslo}\} \cup \{a^n \mid n \in \mathbb{N}_0, n > 6\}$
- $L_{3.3} = \{vcw \mid v, w \in \{a, b\}^*, (|v|_a + |w|_b) \bmod 3 = 1\}$
- $L_{3.4} = \{a^m b^n c^j \mid m, n, j \in \mathbb{N}_0, 0 < m < n < 5\}$
- $L_{3.5} = \{a^m b^n v \mid v \in \{b, c\}^*, m, n \in \mathbb{N}_0, m \geq 1, n < |v|\}$

Myhillova-Nerodova věta

Pravá kongruence

- Necht' Σ je abeceda a $\sim$ je relace ekvivalence na Σ^* . Pak platí:
 $\sim$ je pravou kongruencí právě tehdy, když $\forall u, v \in \Sigma^*$:
$$u \sim v \Rightarrow \forall w \in \Sigma^* : u.w \sim v.w$$

Myhillova-Nerodova věta (upravená a jen část)

- Necht' L je jazyk nad abecedou Σ . Pak platí:
 L je regulární $\Rightarrow$ existuje pravá kongruence $\sim$ konečného indexu k taková, že jazyk L je sjednocením některých tříd rozkladu $\Sigma^* / \sim$

Příklad 4

Myhillova-Nerodova věta

Rozhodněte, zda následující jazyky jsou, nebo nejsou regulární

- $L_{4.1} = \{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$
- $L_{4.2} = \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}_0, i \neq j\}$
- $L_{4.3} = \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}_0, i < j\}$
- $L_{4.4} = \{a w w \mid w \in \{b, c\}^*\}$

Příklad 5

Uzávěrové vlastnosti

Rozhodněte, zda následující jazyk je, nebo není regulární

- $L_{5.1} = \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}_0, i \neq j\}$

Bezkontextové gramatiky

Jednoznačnost gramatiky

Prázdnota jazyka

Zbytečné symboly: negenerující a nedostupné symboly

Epsilonová pravidla

Jednoduchá pravidla

Věta o dosazování

Příklad 1

Jednoznačnost gramatiky

Rozhodněte, zda je následující gramatika

$$G_1 = (\{S, T\}, \{1, 2\}, P, S)$$

s přepisovacími pravidly

$$S \rightarrow 1ST \mid \varepsilon$$

$$T \rightarrow 2 \mid \varepsilon$$

jednoznačná, nebo nejednoznačná

Příklad 2

Prázdnost jazyka

Mějme následující bezkontextovou gramatiku

$$G_2 = (\{S, A, B, C, D, E, F, G\}, \{1, 2\}, P, S)$$

s přepisovacími pravidly

$$S \rightarrow 2B1E \mid 1A$$

$$A \rightarrow AA \mid 2AB$$

$$B \rightarrow B1 \mid 11$$

$$C \rightarrow 2E \mid CC \mid A$$

$$D \rightarrow 2 \mid D \mid AS1 \mid AC$$

$$E \rightarrow A2 \mid \varepsilon \mid D1$$

$$F \rightarrow SB$$

$$G \rightarrow 2A \mid A1A$$

Rozhodněte, zda generuje prázdný, nebo neprázdný jazyk

Příklad 3

Zbytečné symboly

Odstraňte zbytečné neterminální symboly z gramatiky G_2

Příklad 4

Epsilonová pravidla

Mějme následující bezkontextovou gramatiku

$$G_4 = (\{S, A, B, C, D\}, \{1, 2\}, P, S)$$

s přepisovacími pravidly

$$S \rightarrow AC \mid AB \mid 1$$

$$A \rightarrow 1A \mid \varepsilon \mid 2C$$

$$B \rightarrow 22 \mid A$$

$$C \rightarrow 2S \mid 2D$$

$$D \rightarrow 1CA \mid \varepsilon \mid 1ACA$$

Odstraňte z této gramatiky epsilonová pravidla

Příklad 5

Jednoduchá pravidla

Mějme následující bezkontextovou gramatiku

$$G_5 = (\{S, A, B, C, D, E, F\}, \{1, 2\}, P, S)$$

s přepisovacími pravidly

$$S \rightarrow 1A \mid DF \mid C$$

$$A \rightarrow D \mid 1A$$

$$B \rightarrow 2E \mid D \mid 1 \mid 1A$$

$$C \rightarrow 1 \mid 22$$

$$D \rightarrow A \mid BB \mid D$$

$$E \rightarrow C \mid \varepsilon$$

$$F \rightarrow BB$$

Odstraňte z této gramatiky jednoduchá pravidla

Příklad 6

Věta o dosazování

Mějme následující bezkontextovou gramatiku

$$G_6 = (\{S, A, B, C\}, \{1, 2\}, P, S)$$

s přepisovacími pravidly

$$S \rightarrow 1A \mid 2B \mid 1C2$$

$$A \rightarrow 1A \mid C \mid CAC2$$

$$B \rightarrow 11B \mid 11 \mid \varepsilon$$

$$C \rightarrow 11 \mid 1A$$

Použijte větu o dosazování na neterminály C a B

Chomského normální tvar

Příklad 1

Chomského normální tvar

Mějme následující vlastní bezkontextovou gramatiku bez jednoduchých pravidel

$$G_1 = (\{S, A, B, C\}, \{1, 2\}, P, S)$$

s přepisovacími pravidly

$$S \rightarrow \varepsilon \mid BC \mid 2 \mid 1B \mid 22 \mid 11A$$

$$A \rightarrow 1A \mid CBB22 \mid 111122$$

$$B \rightarrow 22 \mid BB \mid 1$$

$$C \rightarrow 22$$

Převeďte tuto gramatiku do Chomského normálního tvaru

Příklad 2

Chomského normální tvar

Mějme následující bezkontextovou gramatiku

$$G_2 = (\{S, A, B, C, D, E, F, G, H, I\}, \{0, 1, 2\}, P, S)$$

s přepisovacími pravidly

$$S \rightarrow 0S \mid HA$$

$$A \rightarrow 1A \mid 1B \mid 1E \mid \varepsilon$$

$$B \rightarrow 1B1 \mid 0BA \mid 2G$$

$$C \rightarrow A1 \mid B0$$

$$D \rightarrow D \mid 00 \mid I \mid 2FB$$

$$E \rightarrow D \mid 1A \mid 1HA \mid 0101$$

$$F \rightarrow 0A \mid 1B \mid 0C$$

$$G \rightarrow BB$$

$$H \rightarrow 1 \mid \varepsilon \mid 00B$$

$$I \rightarrow D \mid 11$$

Převeďte tuto gramatiku do Chomského normálního tvaru

Jinými slovy odstraňte negenerující neterminály, nedostupné neterminály, epsilonová pravidla, jednoduchá pravidla, opět negenerující a nedostupné neterminály a nakonec proveďte samotnou transformaci

Algorithmus CYK

Příklad 1

Algoritmus CYK

Pomocí algoritmu CYK rozhodněte, zda je řetězec 010102 větou generovanou gramatikou

$$G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{0, 1, 2\}, P, A)$$

s přepisovacími pravidly

$$A \rightarrow CD \mid BB \mid 0$$

$$B \rightarrow BA \mid 1 \mid 2$$

$$C \rightarrow BA \mid 2$$

$$D \rightarrow AD \mid BC \mid 1 \mid 2$$

Příklad 2

Algoritmus CYK

Pomocí algoritmu CYK rozhodněte, zda je řetězec 110100 větou generovanou gramatikou

$$G_2 = (\{A, B, C\}, \{0, 1\}, P, A)$$

s přepisovacími pravidly

$$A \rightarrow BC \mid AB \mid 1$$

$$B \rightarrow AA \mid 0$$

$$C \rightarrow CB \mid 1 \mid 0$$

Návrh zásobníkových automatů

Zásobníkové automaty

Zásobníkový automat je sedmice $R = (Q, \Sigma, G, \delta, q_0, Z_0, F)$, kde

- Q je množina stavů
- Σ je vstupní abeceda
- G je zásobníková abeceda
- δ je **přechodová funkce**: $Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times G^* \rightarrow \mathcal{P}(Q \times G^*)$
- $q_0 \in Q$ je počáteční stav
- $Z_0 \in G$ je **počáteční symbol** na zásobníku
- $F \subseteq Q$ je množina koncových stavů

Příklad 1

Návrh zásobníkových automatů

Navrhněte zásobníkové automaty pro následující jazyky

- $L_{1.1} = \{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}_0, i \geq 0\}$
- $L_{1.2} = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$
- $L_{1.3} = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \in \mathbb{N}_0, i, j, k \geq 0, i + j = k\}$
- $L_{1.4} = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \in \mathbb{N}_0, i, j, k \geq 0, i + k = j\}$
- $L_{1.5} = \{ucv \mid u, v \in \{a, b\}^*, 2|u|_a = 3|v|_b\}$
- $L_{1.6} = \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}_0, 2 \leq i \leq j \leq 2i\}$
- $L_{1.7} = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, |w|_a = |w|_b\}$
- $L_{1.8} = \{ucv \mid u, v \in \{a, b\}^*, |u| \neq |v|\}$
- $L_{1.9} = \{a^i b^{i-j} c^{j+k} d^{\lceil k/2 \rceil} \mid i, j, k \in \mathbb{N}_0, i \geq j\}$

Syntaktická analýza

Metoda shora dolů

Metoda zdola nahoru

Příklad 1

Top-down syntaktická analýza

Zkonstruuje zásobníkový automat umožňující realizovat syntaktickou analýzu metodou shora dolů pro následující bezkontextovou gramatiku

$$G = (\{S, X, Y\}, \{a, b, c, d\}, P, S)$$

s přepisovacími pravidly

$$S \rightarrow XY$$

$$X \rightarrow aXb \mid ab$$

$$Y \rightarrow cYd \mid cd$$

Určete levý rozklad pro řetězec aabbcd

Příklad 2

Bottom-up syntaktická analýza

Zkonstruuje zásobníkový automat umožňující realizovat syntaktickou analýzu metodou zdola nahoru pro následující bezkontextovou gramatiku

$$G = (\{S, X, Y\}, \{a, b, c, d\}, P, S)$$

s přepisovacími pravidly

$$S \rightarrow XY$$

$$X \rightarrow aXb \mid ab$$

$$Y \rightarrow cYd \mid cd$$

Určete pravý rozklad pro řetězec aabbcd

Formální překlady

Konečné překladové automaty

Zásobníkové překladové automaty

Regulární překladové gramatiky

Bezkontextové překladové gramatiky

Překládové automaty

Konečný překládový automat je šestice $M = (Q, \Sigma, D, \delta, q_0, F)$, kde

- Q je množina stavů
- Σ je vstupní abeceda
- D je výstupní abeceda
- δ je přechodová funkce: $Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow \mathcal{P}(Q \times D^*)$
- $q_0 \in Q$ je počáteční stav
- $F \subseteq Q$ je množina koncových stavů

Příklad 1

Návrh KPA

Navrhněte konečné překladové automaty realizující následující formální překlady

- $Z_{1.1} = \{(a^i b^j, x^{i+j}) \mid i, j \in \mathbb{N}_0\}$
- $Z_{1.2} = \{(a^i b^j c^k, x^{2i} y^{\lfloor j/2 \rfloor} z^{k \bmod 3}) \mid i, j, k \in \mathbb{N}_0, i > 0\}$
- $Z_{1.3} = \{(u, v) \mid u, v \in \{0, 1\}^*, \text{každý výskyt podřetězce } 0101 \text{ nalezený v řetězci } u \text{ se v řetězci } v \text{ nahradí za } 10\}$
- $Z_{1.4} = \{(x, y) \mid x, y \text{ jsou čísla v ternární soustavě, } x \text{ je dělitelné } 4_{10} = 11_3 \text{ se zbytkem } 1_{10} \text{ nebo } 3_{10} \text{ a } y = \lfloor x/4_{10} \rfloor\}$

Překládové automaty

Zásobníkový překládový automat je osmice

$R = (Q, \Sigma, G, D, \delta, q_0, Z_0, F)$, kde

- Q je množina stavů
- Σ je vstupní abeceda
- G je zásobníková abeceda
- D je výstupní abeceda
- δ je přechodová funkce:
$$Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times G^* \rightarrow \mathcal{P}(Q \times G^* \times D^*)$$
- $q_0 \in Q$ je počáteční stav
- $Z_0 \in G$ je počáteční symbol na zásobníku
- $F \subseteq Q$ je množina koncových stavů

Příklad 2

Návrh ZPA

Navrhněte zásobníkové překladové automaty realizující následující formální překlady

- $Z_{2.1} = \{(a^i b^j, x^j y^i) \mid i, j \in \mathbb{N}_0\}$
- $Z_{2.2} = \{(ucv, uu^R c a^i) \mid u, v \in \{a, b\}^*, i = |v|_a + 2\}$
- $Z_{2.3} = \{(a^i b^j c^k, z^{k \bmod 3} y^{\lfloor j/2 \rfloor} x^{2i}) \mid i, j, k \in \mathbb{N}_0, i > 0\}$
- $Z_{2.4} = \{(ucv, x^{|v|-|u|}) \mid u, v \in \{a, b\}^*, |u| \leq |v| \leq 2|u|\}$
- $Z_{2.5} = \{(a^r b^s c^t d^u, w^r x^{2s-2r} y^{r+u} z^{u-t}) \mid$
 $r, s, t, u \in \mathbb{N}_0, 0 \leq r \leq s, 0 \leq t \leq u\}$

Překladové gramatiky

Překladová gramatika je pětice $G = (N, T, D, R, S)$, kde

- N je množina neterminálů
- T je množina terminálů
- D je množina výstupních symbolů
 - $N \cap T = \emptyset, N \cap D = \emptyset, T \cap D = \emptyset$
- R je množina přepisovacích pravidel
 - Každé je ve tvaru $X \rightarrow \alpha$, kde $X \in N, \alpha \in (N \cup T \cup D)^*$
- $S \in N$ je startovní neterminál

Překladové gramatiky

Třída 2: **bezkontextová** překladová gramatika:

- $X \rightarrow \alpha$, kde $X \in N, \alpha \in (N \cup T \cup D)^*$

Třída 3: **regulární** překladová gramatika:

- $X \rightarrow auY$, kde $X, Y \in N, a \in T, u \in D^*$
- $X \rightarrow au$, kde $X \in N, a \in T, u \in D^*$
- $S \rightarrow \varepsilon, \dots$

Příklad 3

Návrh RPG

Navrhněte regulární překladové gramatiky realizující následující formální překlady

- $Z_{3.1} = \{(w, \textcircled{w}) \mid w \in \{a, b\}^*\}$
- $Z_{3.2} = \{(a^i b^j, x^{i+1} y^{(j+1) \bmod 2}) \mid i, j \in \mathbb{N}_0, i > 0\}$

Příklad 4

Návrh BPG

Navrhněte (bezkontextové) překladové gramatiky realizující následující formální překlady

- $Z_{4.1} = \{(w, \textcircled{w}\textcircled{w}^R) \mid w \in \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}^*\}$
- $Z_{4.2} = \{(ucv, \textcircled{u}\textcircled{c}\textcircled{v}\textcircled{v}^R) \mid u, v \in \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}^*, |v| > 0\}$
- $Z_{4.3} = \{(\mathbf{a}^i\mathbf{b}^j\mathbf{c}^k, x^{i+k}y^j) \mid i, j, k \in \mathbb{N}_0, i > j\}$
- $Z_{4.4} = \{(ucv, \mathbf{x}^{|u|}\mathbf{y}^{|v|_b - |u|_a}) \mid u, v \in \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}^*, |u|_a \leq |v|_b \leq 3|u|_a\}$

Turingův stroj

Turingův stroj

Deterministický Turingův stroj je sedmice

$T = (Q, \Sigma, G, \delta, q_0, \perp, F)$, kde

- Q je množina stavů
- Σ je vstupní abeceda
- G je pracovní abeceda
 - $\Sigma \subset G$
- δ je přechodová funkce:
 $(Q \setminus F) \times G \rightarrow Q \times G \times \{-, 0, +\}$
- $q_0 \in Q$ je počáteční stav
- $\perp$ je prázdný symbol
 - $\perp \in G, \perp \notin \Sigma$
- $F \subseteq Q$ je množina koncových stavů

Turingův stroj

Nedeterministický Turingův stroj je sedmice

$T = (Q, \Sigma, G, \delta, q_0, \perp, F)$, kde

- Q je množina stavů
- Σ je vstupní abeceda
- G je pracovní abeceda
 - $\Sigma \subset G$
- δ je přechodová funkce:
 $(Q \setminus F) \times G \rightarrow \mathcal{P}(Q \times G \times \{-, 0, +\})$
- $q_0 \in Q$ je počáteční stav
- $\perp$ je prázdný symbol
 - $\perp \in G, \perp \notin \Sigma$
- $F \subseteq Q$ je množina koncových stavů

Příklad 1

Intuitivní návrh DTS a NTS

Navrhňte Turingovy stroje pro následující jazyky

- $L_{1.1} = \{a^i \mid i = 2k + 1, k \in \mathbb{N}_0, k \geq 0\}$
- $L_{1.2} = \{ucu \mid u \in \{a, b\}^*\}$
- $L_{1.3} = \{u \mid u \in \{a, b\}^*, u \text{ je palindrom} \}$
- $L_{1.4} = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \in \mathbb{N}_0, i + k = j\}$
- $L_{1.5} = \{a^i b^i c^i \mid i \in \mathbb{N}_0, i \geq 0\}$

Základy složitosti

Třídy rozhodovacích problémů P a NP

Polynomiální redukce

NP-těžké a NP-úplné problémy

Příklad 1

Polynomiální redukce

Dokažte, že problém *Kachlíkování* je NP-úplný.