http://www.ksi.mff.cuni.cz/~svoboda/courses/211-BI-AAG/

Cvičení

BI-AAG: Automaty a gramatiky

2021/22 ZS

Martin Svoboda

martin.svoboda@fit.cvut.cz

České vysoké učení technické v Praze, Fakulta informačních technologií

Formální jazyky

Základní pojmy
Gramatiky
Chomského hierarchie
Jazykové operace nad gramatikami
Derivační stromy

Gramatiky

Gramatika je čtveřice $G = (N, T, P, S)$, kde

- N je **množina neterminálů**
- T je **množina terminálů**
  - $N \cap T = \emptyset$
- P je **množina přepisovacích pravidel**
  - Každé je ve tvaru $\alpha X \beta \to \gamma$, kde $\alpha, \beta, \gamma \in (N \cup T)^*, X \in N$
- $S \in N$ je **startovní neterminál**

Chomského hierarchie

Třída 0: **rekurzivně spočetné jazyky**: TS, NG:

- $\alpha X \beta \to \gamma$, kde $\alpha, \beta, \gamma \in (N \cup T)^*, X \in N$

Třída 1: **kontextové jazyky**: LOTS, KG:

- $\alpha X \beta \to \alpha \delta \beta$, kde $\alpha, \beta \in (N \cup T)^*, X \in N, \delta \in (N \cup T)^+$
- $S \to \varepsilon, \dots$

Třída 2: **bezkontextové jazyky**: ZA, BG:

- $X \to \gamma$, kde $X \in N, \gamma \in (N \cup T)^*$

Třída 3: **regulární jazyky**: KA, RG:

- $X \to aY$, kde $X, Y \in N, a \in T$
- $X \to a$, kde $X \in N, a \in T$
- $S \to \varepsilon, \dots$

Příklad 1

Intuitivní návrh gramatik

Navrhněte gramatiky pro následující jazyky nad abecedou $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{i}, \mathtt{o}, \mathtt{y}, \mathtt{n}\}$

- $L_1 = \{\mathtt{on}, \mathtt{ona}, \mathtt{ono}\}$
- $L_2 = \{\mathtt{oni}, \mathtt{ony}\}$

Příklad 2

Jazykové operace nad BG

Zkonstruujte gramatiky pro následující jazyky

- $L_3 = L_1 \cup L_2$ (sjednocení jazyků)
- $L_4 = L_1 . L_2$ (součin jazyků)
- $L_5 = {L_1}^*$ (iterace jazyka)

Příklad 3

Derivační stromy

Mějme následující bezkontextovou gramatiku

$$G = (\{A, B, C\}, \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}, P, A)$$

s postupně očíslovanými přepisovacími pravidly (1 až 7)

$$A \to \mathtt{0}BB\mathtt{1} \mid A\mathtt{0}A$$
$$B \to \varepsilon \mid \mathtt{1}CA$$
$$C \to AB \mid \mathtt{0} \mid \mathtt{1}$$

Zkonstruujte derivační strom pro větu $\mathtt{011011}$ vygenerovanou pomocí derivace $A \overset{1}{\Rightarrow} \mathtt{0}BB\mathtt{1} \overset{4}{\Rightarrow} \mathtt{01}CAB\mathtt{1} \overset{1}{\Rightarrow} \mathtt{01}C\mathtt{0}BB\mathtt{1}B\mathtt{1} \overset{3}{\Rightarrow}$

$\mathtt{01}C\mathtt{0}B\mathtt{1}B\mathtt{1} \overset{7}{\Rightarrow} \mathtt{0110}B\mathtt{1}B\mathtt{1} \overset{3}{\Rightarrow} \mathtt{0110}B\mathtt{11} \overset{3}{\Rightarrow} \mathtt{011011}$

Intuitivní návrh gramatik

Regulární gramatiky
Bezkontextové gramatiky
Kontextové gramatiky
Neomezené gramatiky

Příklad 1

Intuitivní návrh gramatik

Navrhněte gramatiky pro následující jazyky

- $L_{1.1} = \{w \mid w \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^*, w$ je binární zápis sudého čísla$\}$
- $L_{1.2} = \{w \mid w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*, |w|_{\mathtt{b}} = 3k, k \in \mathbb{N}_0, k \geq 0\}$
- $L_{1.3} = \{w \mid w \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^*$, za každým symbolem $\mathtt{1}$ následují alespoň dva symboly $\mathtt{0}\}$
- $L_{1.4} = \{u^3 v \mid u \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, v \in \{\mathtt{c}, \mathtt{d}\}^*, 0 < |v| < 3\}$

Příklad 2

Intuitivní návrh gramatik

Navrhněte gramatiky pro následující jazyky

- $L_{2.1} = \{w \mid w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*, w$ začíná na podřetězec $\mathtt{baba}\}$
- $L_{2.2} = \{w \mid w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*, w$ končí na podřetězec $\mathtt{baba}\}$
- $L_{2.3} = \{w \mid w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*, w$ obsahuje podřetězec $\mathtt{baba}\}$
- $L_{2.4} = \{w \mid w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*, w$ obsahuje podsekvenci $\mathtt{baba}\}$

Příklad 3

Intuitivní návrh gramatik

Navrhněte gramatiky pro následující jazyky

- $L_{3.1} = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^i \mid i \in \mathbb{N}_0, i \geq 0\}$
- $L_{3.2} = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^i \mid i \in \mathbb{N}_0, 3 \geq i \geq 0\}$
- $L_{3.3} = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^i \mid i \in \mathbb{N}_0\} \cap \{w \mid w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}^*, |w| > 2\}$
- $L_{3.4} = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j \mid i, j \in \mathbb{N}_0, i \geq j \geq 0\}$
- $L_{3.5} = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j \mid i, j \in \mathbb{N}_0, i \neq j\}$
- $L_{3.6} = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j \mid i, j \in \mathbb{N}_0, 3i \neq 2j\}$
- $L_{3.7} = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j \mid i, j \in \mathbb{N}_0, 1 \leq j \leq i \leq 2j\}$

Příklad 4

Intuitivní návrh gramatik

Navrhněte gramatiky pro následující jazyky

- $L_{4.1} = \{ww^R \mid w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*\} \cup \{w \mid w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*, w = w^R\}$
- $L_{4.2} = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j\mathtt{c}^k \mid i, j, k \in \mathbb{N}, i + k = j\}$
- $L_{4.3} = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j\mathtt{c}^k \mid i, j, k \in \mathbb{N}_0, j + k > i\}$
- $L_{4.4} = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j\mathtt{c}^k \mid i, j, k \in \mathbb{N}_0, i \geq j, k = i - j\}$
- $L_{4.5} = \{u\mathtt{c}v \mid u, v \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*, |u|_\mathtt{a} < |v|_\mathtt{b}\}$
- $L_{4.6} = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j\mathtt{c}^k\mathtt{d}^l \mid i, j, k, l \in \mathbb{N}_0, i + j = k + l\}$
- $L_{4.7} = \{\mathtt{a}^{m \bmod 2}\mathtt{b}^{3m+1}\mathtt{c}^n\mathtt{d}^{2(n-m)} \mid m, n \in \mathbb{N}_0, m \leq n\}$

Příklad 5

Intuitivní návrh gramatik

Navrhněte gramatiky pro následující jazyky

- $L_{5.1} = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^i\mathtt{c}^i \mid i \in \mathbb{N}_0, i \geq 0\}$
- $L_{5.2} = \{ww \mid w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*\}$

Intuitivní návrh KA

Konečné automaty

Deterministický konečný automat je pětice $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, kde

- Q je **množina stavů**
- Σ je **vstupní abeceda**
- δ je **přechodová funkce**: $Q \times \Sigma \to Q$
- $q_0 \in Q$ je **počáteční stav**
- $F \subseteq Q$ je **množina koncových stavů**

Příklad 1

Intuitivní návrh DKA

Navrhněte konečné automaty pro následující jazyky

- $L_{1.1} = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j \mid i, j \in \mathbb{N}_0, i > 1, j \geq 0\}$
- $L_{1.2} = \{\mathtt{on}, \mathtt{ona}, \mathtt{ono}\}$
- $L_{1.3} = \{w \mid w \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^*, w$ je binární zápis sudého čísla$\}$
- $L_{1.4} = \{w \mid w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*, |w|_\mathtt{b} = 4k + 1, k \in \mathbb{N}_0, k \geq 0\}$
- $L_{1.5} = \{w \mid w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*, w$ začíná a končí na stejný symbol$\}$

Konečné automaty

Nedeterministický konečný automat je pětice $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, kde

- Q je **množina stavů**
- Σ je **vstupní abeceda**
- δ je **přechodová funkce**: $Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$
- $q_0 \in Q$ je **počáteční stav**
- $F \subseteq Q$ je **množina koncových stavů**

Příklad 2

Intuitivní návrh DKA a NKA

Navrhněte konečné automaty pro následující jazyky

- $L_{2.1} = \{w \mid w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}^*, w$ obsahuje podsekvenci $\mathtt{aab}\}$
- $L_{2.2} = \{w \mid w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}^*, w$ začíná na podřetězec $\mathtt{baba}\}$
- $L_{2.3} = \{w \mid w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}^*, w$ končí na podřetězec $\mathtt{baba}\}$
- $L_{2.4} = \{w \mid w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}^*, w$ obsahuje podřetězec $\mathtt{baba}\}$

Příklad 3

Intuitivní návrh DKA

Navrhněte konečné automaty pro následující jazyky

- $L_{3.1} = \{w \,|\, w \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^*, w$ je binární číslo dělitelné $3_{10}\}$
- $L_{3.2} = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j \,|\, i, j \in \mathbb{N}_0, i = j \bmod 2\}$
- $L_{3.3} = \{w \,|\, w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*, |w|_\mathtt{a} \bmod 2 \neq |w|_\mathtt{b} \bmod 2\}$
- $L_{3.4} = \{w \,|\, w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*, |w|_\mathtt{a} \geq 2, |w|_\mathtt{b} < 2\}$
- $L_{3.5} = \{w \,|\, w = u\mathtt{011}v, |w| = 2k, k \in \mathbb{N}_0, u, v \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^*\}$

Úpravy konečných automatů

Dosažitelné a nedosažitelné stavy
Užitečné a zbytečné stavy
NKA s epsilonovými přechody
NKA s více počátečními stavy

Příklad 1

Dosažitelné a nedosažitelné stavy

Odstraňte nedosažitelné stavy z následujícího konečného automatu

		a	b
$\rightarrow$	0	$\{1\}$	
$\leftarrow$	1	$\{5,6\}$	$\{0,1\}$
	2		
	3	$\{2\}$	$\{1\}$
$\leftarrow$	4		$\{3\}$
	5		$\{6\}$
$\leftarrow$	6	$\{2,6\}$	$\{6\}$

Příklad 2

Užitečné a zbytečné stavy

Odstraňte zbytečné stavy z následujícího konečného automatu

		a	b
$\rightarrow$	0	$\{1\}$	
$\leftarrow$	1	$\{0,3\}$	$\{2\}$
	2		$\{3\}$
	3		
	4	$\{4\}$	$\{5\}$
$\leftarrow$	5	$\{5\}$	
	6	$\{4\}$	$\{2,3\}$

Konečné automaty

Nedeterministický konečný automat s ε-přechody je pětice $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, kde

- Q je **množina stavů**
- Σ je **vstupní abeceda**
- δ je **přechodová funkce**: $Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}(Q)$
- $q_0 \in Q$ je **počáteční stav**
- $F \subseteq Q$ je **množina koncových stavů**

Příklad 3

NKA s epsilon přechody

Odstraňte ε přechody z následujícího konečného automatu

		a	b	ε
$\rightarrow$	0	$\{0,4,5\}$		$\{1,2\}$
	1		$\{2\}$	
	2	$\{2\}$	$\{3,6\}$	$\{4\}$
$\leftarrow$	3		$\{3\}$	
$\leftarrow$	4	$\{3\}$		$\{3\}$
	5	$\{6\}$		
	6	$\{6\}$		$\{4\}$

Příklad 4

NKA s epsilon přechody

Odstraňte ε přechody z následujícího konečného automatu

		a	ε
$\rightarrow$	0	$\{3\}$	$\{1\}$
	1	$\{4\}$	$\{2\}$
	2	$\{5\}$	
	3		$\{1\}$
	4		$\{2\}$
$\leftarrow$	5		

Příklad 5

NKA s epsilon přechody

Odstraňte ε přechody z následujícího konečného automatu

		0	1	ε
$\rightarrow$	A		$\{I\}$	$\{C,I\}$
	B	$\{I\}$	$\{B,F\}$	$\{E\}$
$\leftarrow$	C	$\{H\}$	$\{E,F\}$	
$\leftarrow$	D	$\{B,E\}$	$\{C,D,G\}$	$\{B,C,D,G\}$
	E	$\{B\}$	$\{B\}$	$\{D\}$
	F		$\{A,G\}$	$\{D\}$
	G	$\{A,B\}$	$\{B\}$	
$\leftarrow$	H	$\{G\}$	$\{A,C\}$	$\{C\}$
	I	$\{E,H\}$	$\{F\}$	$\{C\}$

Konečné automaty

Nedeterministický konečný automat s více počátečními stavy je pětice $M = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$, kde

- Q je **množina stavů**
- Σ je **vstupní abeceda**
- δ je **přechodová funkce**: $Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$
- $I \subseteq Q$ je **množina počátečních stavů**
- $F \subseteq Q$ je **množina koncových stavů**

Příklad 6

NKA s více počátečními stavy

Převeďte následující NKA s více počátečními stavy na ekvivalentní NKA jen s jedním počátečním stavem

		0	1	2
$\leftrightarrow$	A		$\{A,D\}$	$\{B,D\}$
$\leftarrow$	B	$\{A,D\}$	$\{B\}$	$\{D\}$
$\rightarrow$	C	$\{B\}$		$\{C,D\}$
	D		$\{B,C\}$	$\{A\}$
$\rightarrow$	E	$\{B\}$	$\{D\}$	$\{\}$

Determinizace NKA

Příklad 1

Determinizace NKA

Pro následující NKA vytvořte ekvivalentní DKA

		a	b
$\leftrightarrow$	0	$\{0,2\}$	$\{1\}$
	1		$\{1,3\}$
$\leftarrow$	2	$\{4\}$	
	3	$\{0\}$	$\{1,2,3\}$
	4	$\{2,4\}$	$\{\}$

Příklad 2

Determinizace NKA

Pro následující NKA vytvořte ekvivalentní DKA

		0	1	2
$\leftrightarrow$	A	{B}	{D}	{C}
$\leftarrow$	B	{D}	{B}	{D}
$\rightarrow$	C	{C}	{A}	{D}
	D	{B}	{B}	{A}

Minimalizace DKA

Příklad 1

Minimalizace DKA

Pro následující DKA vytvořte ekvivalentní minimální DKA

		0	1	2
↔	A	D	H	H
←	B	A	B	B
	C	A	E	G
	D		F	C
←	E	A	E	G
←	F	J	A	E
←	G	A	G	B
	H		F	C
	I	K	H	I
←	J	A	J	E
	K	A	A	F

Příklad 1

Minimalizace DKA

Ověřte izomorfismus výsledného automatu vůči následujícímu DKA

		0	1	2
$\leftarrow$	S	V	S	S
	T	S		V
	U	V	S	S
$\leftrightarrow$	V	W	W	W
	W		T	U

Příklad 2

Minimalizace DKA

Pro následující DKA vytvořte ekvivalentní minimální DKA

		0	1
$\rightarrow$	A	B	F
	B	G	C
$\leftarrow$	C	A	I
	D	C	G
	E	H	F
	F	I	G
	G	G	E
	H	G	I
$\leftarrow$	I	E	C

Příklad 3

Minimalizace DKA

Pro následující DKA vytvořte ekvivalentní minimální DKA

		0	1
$\leftarrow$	A	B	C
	B	D	A
$\rightarrow$	C		I
$\leftarrow$	D		I
$\leftarrow$	E	J	H
$\leftarrow$	F	F	F
	G		J
	H	D	A
	I	E	A
	J	J	G

Jazykové operace nad KA

Sjednocení: počáteční stavy, epsilonové přechody, paralelní běh
Průnik: paralelní běh
Doplněk
Součin: epsilonové přechody, bez epsilonových přechodů
Iterace: epsilonové přechody, bez epsilonových přechodů

Příklad 1

Jazykové operace nad KA

Mějme následující konečné automaty přijímající jazyky L_1 resp. L_2

		0	1
$\leftrightarrow$	A	{B}	{B}
	B		{B,C}
$\leftarrow$	C	{C}	{C}

		0	1
$\rightarrow$	D	{E}	{D,F}
	E	{F}	{E}
$\leftarrow$	F	{F}	{F}

Zkonstruujte konečné automaty pro následující jazyky

- $L_1 \cup L_2$
- $L_1 \cap L_2$
- $\overline{L_1}$
- $L_1 . L_2$
- $(L_2)^*$

Regulární výrazy

Intuitivní návrh RV
Zjednodušování RV
Regulární rovnice
Soustavy regulárních rovnic
Derivace RV

Regulární výrazy

Regulární výraz nad abecedou Σ

- a pro každé $a \in \Sigma$
- ε
- $\emptyset$
- **Alternativa** $(r_1 + r_2)$, kde r_1 a r_2 jsou RV
- **Zřetězení** $(r_1 . r_2)$, kde r_1 a r_2 jsou RV
- **Iterace** (r^*), kde r je RV

Regulární výrazy

Hodnota regulárního výrazu r nad abecedou Σ

- $h(a) = \{a\}$
- $h(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$
- $h(\emptyset) = \{\}$
- $h(r_1 + r_2) = h(r_1) \cup h(r_2)$
- $h(r_1 . r_2) = h(r_1) . h(r_2)$
- $h(r^*) = (h(r))^*$

Příklad 1

Intuitivní návrh RV

Navrhněte regulární výrazy pro následující jazyky

- $L_{1.1} = \{w \mid w \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^*, w \text{ obsahuje } \mathtt{0110}\}$
- $L_{1.2} = \{w \mid w \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^*, |w| = 3k + 1, k \in \mathbb{N}_0\}$
- $L_{1.3} = \{w \mid w \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^*, |w|_{\mathtt{1}} \geq 3\}$
- $L_{1.4} = \{w \mid w \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^*, w \text{ má sudý počet symbolů } \mathtt{0}\}$
- $L_{1.5} = \{u^3 v \mid u \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, v \in \{\mathtt{c}, \mathtt{d}\}^*, 0 < |v| < 3\}$
- $L_{1.6} = \{w \mid w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*, w \text{ začíná a končí na stejný symbol}\}$
- $L_{1.7} = \{\mathtt{a}^i \mathtt{b}^j \mid i, j \in \mathbb{N}_0, i = j \bmod 2\}$
- $L_{1.8} = \{\mathtt{a}^i \mathtt{b}^j \mid i, j \in \mathbb{N}_0, (i + j) \bmod 3 = 1\}$

Příklad 2

Zjednodušování RV

Zjednodušte následující regulární výrazy

- $r_{2.1} = 0^*(0^* + 1^*)$
- $r_{2.2} = 11^* + 0^*0 + \varepsilon$
- $r_{2.3} = 0^*(1 + \varepsilon)0^*(0 + 1)^*$
- $r_{2.4} = 11(11)^* + 11\emptyset + (11.\emptyset^* + 00)^*(\varepsilon + 1(1 + (11)^*100)) + 00$

Příklad 3

Regulární rovnice

Vyřešte následující regulární rovnice

- $X = 01X + 1$
- $X = X1 + X01 + 2$
- $X = (0^*1 + 1).(X + 1)$
- $X = X + X(1 + 0^*1 + \varepsilon)$

Příklad 4

Soustavy regulárních rovnic

Vyřešte následující soustavy regulárních rovnic

- $X = 01^*Y + 0X + 0$
  $Y = 1X + 1$
- $X = X0 + Y1 + 2^*$
  $Y = X01 + Y1 + 0$
- $X = 01X + 1^*Y + 01$
  $Y = 101Y + 1X + 0$

Příklad 5

Soustavy regulárních rovnic

Vyřešte následující soustavy regulárních rovnic

- $X = 0X + 1Y$
  $Y = 1^*Z$
  $Z = 0X + 1Y + 0^*1^*Z + \varepsilon$
- $X = (01^* + 1)X + Y$
  $Y = 11 + 1X + 00Z$
  $Z = \varepsilon + X + Y$

Regulární výrazy

Derivace regulárního výrazu r podle $x \in \Sigma$

- $\dfrac{\mathrm{d}\, a}{\mathrm{d}\, x} = \begin{cases} \varepsilon & \text{pokud } a = x \\ \emptyset & \text{pokud } a \neq x \end{cases}$
- $\dfrac{\mathrm{d}\, \varepsilon}{\mathrm{d}\, x} = \emptyset$
- $\dfrac{\mathrm{d}\, \emptyset}{\mathrm{d}\, x} = \emptyset$
- $\dots$

Regulární výrazy

Derivace regulárního výrazu r podle $x \in \Sigma$

- $\dots$
- $\dfrac{\mathrm{d}\,(r_1 + r_2)}{\mathrm{d}\,x} = \dfrac{\mathrm{d}\,r_1}{\mathrm{d}\,x} + \dfrac{\mathrm{d}\,r_2}{\mathrm{d}\,x}$
- $\dfrac{\mathrm{d}\,(r_1 . r_2)}{\mathrm{d}\,x} = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,r_1}{\mathrm{d}\,x}.r_2 & \text{pokud } \varepsilon \notin h(r_1) \\ \dfrac{\mathrm{d}\,r_1}{\mathrm{d}\,x}.r_2 + \dfrac{\mathrm{d}\,r_2}{\mathrm{d}\,x} & \text{pokud } \varepsilon \in h(r_1) \end{cases}$
- $\dfrac{\mathrm{d}\,(r^*)}{\mathrm{d}\,x} = \dfrac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\,x}.r^*$

Příklad 6

Derivace RV

Určete derivace následujících regulárních výrazů

- $r_{6.1} = \frac{\mathrm{d}\, 10^*1}{\mathrm{d}\, 1}$
- $r_{6.2} = \frac{\mathrm{d}\, (01 + 10)^*}{\mathrm{d}\, 0}$
- $r_{6.3} = \frac{\mathrm{d}\, (010 + 101 + 0^*1 + 1^*0)}{\mathrm{d}\, 0}$
- $r_{6.4} = \frac{\mathrm{d}\, 0(01 + 1)^*}{\mathrm{d}\, 0101}$

Převody mezi KA, RG a RV

RG $\rightarrow$ KA: přímá transformace
KA $\rightarrow$ RG: přímá transformace
RV $\rightarrow$ KA: derivace, sousedé, postupná konstrukce
KA $\rightarrow$ RV: pravé a levé regulární rovnice, eliminace stavů
RG $\rightarrow$ RV: pravé regulární rovnice, eliminace neterminálů
RV $\rightarrow$ RG: derivace, postupná konstrukce

Příklad 1

Převod RG $\rightarrow$ KA

Převeďte následující regulární gramatiku

$$(\{S, A, B\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}, P, S)$$

s přepisovacími pravidly

$$\begin{aligned} S &\rightarrow \mathtt{a}A \mid \mathtt{b}B \mid \varepsilon \\ A &\rightarrow \mathtt{a}A \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{c} \\ B &\rightarrow \mathtt{c}A \mid \mathtt{b} \end{aligned}$$

na ekvivalentní konečný automat

Příklad 2

Převod KA $\rightarrow$ RG

Převeďte následující automat na ekvivalentní regulární gramatiku

		0	1	2
$\leftrightarrow$	S	{S,A}	{B}	{}
	A	{B}	{C}	{A}
	B		{S}	{C}
$\leftarrow$	C	{C}	{}	

Příklad 3

Převod RV $\rightarrow$ KA

Převeďte následující regulární výraz

$$(\mathtt{a} + \mathtt{b})^*.(\emptyset^* + \varepsilon).\mathtt{ab}$$

na ekvivalentní konečný automat

Použijte metody derivací, sousedů a postupné konstrukce

Příklad 4

Převod KA $\rightarrow$ RV

Převeďte následující automat na ekvivalentní regulární výraz

		0	1	2
$\leftrightarrow$	A	$\{A\}$	$\{B\}$	$\{B\}$
$\leftarrow$	B	$\{B\}$		

Použijte metody pravých a levých regulárních rovnic

Příklad 5

Převod KA $\rightarrow$ RV

Převeďte následující automat na ekvivalentní regulární výraz

		0	1	2
$\leftrightarrow$	A	$\{A\}$	$\{B\}$	$\{B\}$
$\leftarrow$	B	$\{B\}$	$\{C\}$	
	C		$\{A,B\}$	

Použijte metodu eleminace stavů

Příklad 6

Převod RG $\rightarrow$ RV

Převeďte následující regulární gramatiku

$$(\{S, A\}, \{0, 1, 2\}, P, S)$$

s přepisovacími pravidly

$$S \rightarrow 0S \mid 1A \mid 1$$
$$A \rightarrow 2A \mid 0$$

na ekvivalentní regulární výraz

Použijte metodu pravých regulárních rovnic

Příklad 7

Převod RG $\rightarrow$ RV

Převeďte následující regulární gramatiku

$$(\{A, B, C, D\}, \{0, 1, 2\}, P, A)$$

s přepisovacími pravidly

$$\begin{aligned} A &\rightarrow 0C \mid 0D \mid \varepsilon \\ B &\rightarrow 1B \mid 2B \\ C &\rightarrow 2B \mid 0C \mid 1 \\ D &\rightarrow 0C \end{aligned}$$

na ekvivalentní regulární výraz

Použijte metodu eliminace neterminálních symbolů

Příklad 8

Převod RV $\rightarrow$ RG

Převeďte následující regulární výraz

$$(00 + 11)^*$$

na ekvivalentní regulární gramatiku

Použijte metodu derivací

Důkazy neregularity

Pumping lemma
Regulární jazyky
Myhillova-Nerodova věta
Uzávěrové vlastnosti

Pumping lemma

Pumping lemma

- Nechť L je jazyk nad abecedou Σ. Pak platí:
  L je regulární $\Rightarrow \exists\, p \in \mathbb{N} : \forall\, w \in L, |w| \geq p : \exists\, x, y, z \in \Sigma^*,$
  $w = x.y.z, |y| \geq 1, |x.y| \leq p : \forall\, k \in \mathbb{N}_0 : x.y^k.z \in L$

Obměna pumping lemmatu

- Nechť L je jazyk nad abecedou Σ. Pak platí:
  $\forall\, p \in \mathbb{N} : \exists\, w \in L, |w| \geq p : \forall\, x, y, z \in \Sigma^*, w = x.y.z, |y| \geq 1,$
  $|x.y| \leq p : \exists\, k \in \mathbb{N}_0 : x.y^k.z \notin L \Rightarrow L$ není regulární

Příklad 1

Pumping lemma

Rozhodněte, zda následující jazyky jsou, nebo nejsou regulární

- $L_{1.1} = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^i \mid i \in \mathbb{N}_0, i \geq 0\}$
- $L_{1.2} = \{ww^R \mid w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*\}$
- $L_{1.3} = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j \mid i, j \in \mathbb{N}_0, 0 \leq i \leq j\}$
- $L_{1.4} = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j \mid i, j \in \mathbb{N}_0, i > j \geq 0\}$
- $L_{1.5} = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j\mathtt{c}^k \mid i, j, k \in \mathbb{N}_0, i, k \geq 0, j \geq 2, i + k = j\}$
- $L_{1.6} = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j \mid i, j \in \mathbb{N}_0, 0 \leq i \leq 2j\}$
- $L_{1.7} = \{\mathtt{a}ww \mid w \in \{\mathtt{b}, \mathtt{c}\}^*\}$

Příklad 2

Pumping lemma

Rozhodněte, zda následující jazyky jsou, nebo nejsou regulární

- $L_{2.1} = \{\mathtt{a}^i w \mid i \in \mathbb{N}_0, i > 1, w \in \{\mathtt{b}, \mathtt{c}\}^*, 2|w|_\mathtt{b} = 3|w|_\mathtt{c}\}$
- $L_{2.2} = \{\mathtt{a}^m \mathtt{b}^n \mathtt{c}^{2n} \mid m, n \in \mathbb{N}_0, m + n > 1\}$
- $L_{2.3} = \{\mathtt{a}^{i^2} \mid i \in \mathbb{N}_0, i \geq 0\}$
- $L_{2.4} = \{v\mathtt{a}^i w \mid i \in \mathbb{N}_0, i \geq 0, v, w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*, |v| = 2|w|\}$
- $L_{2.5} = \{\mathtt{a}^i \mathtt{b}^j \mid i, j \in \mathbb{N}_0, i, j \geq 0, i \neq j\}$

Příklad 3

Regulární jazyky

Rozhodněte, zda následující jazyky jsou, nebo nejsou regulární

- $L_{3.1} = \{\mathtt{a}^n \mid n \text{ je prvočíslo } \} \cap \{\mathtt{a}^n \mid n \in \mathbb{N}_0, n < 6\}$
- $L_{3.2} = \{\mathtt{a}^n \mid n \text{ je prvočíslo } \} \cup \{\mathtt{a}^n \mid n \in \mathbb{N}_0, n > 6\}$
- $L_{3.3} = \{v\mathtt{c}w \mid v, w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*, (|v|_\mathtt{a} + |w|_\mathtt{b}) \bmod 3 = 1\}$
- $L_{3.4} = \{\mathtt{a}^m\mathtt{b}^n\mathtt{c}^j \mid m, n, j \in \mathbb{N}_0, 0 < m < n < 5\}$
- $L_{3.5} = \{\mathtt{a}^m\mathtt{b}^n v \mid v \in \{\mathtt{b}, \mathtt{c}\}^*, m, n \in \mathbb{N}_0, m \geq 1, n < |v|\}$

Myhillova-Nerodova věta

Pravá kongruence

- Nechť Σ je abeceda a $\sim$ je relace ekvivalence na Σ^*. Pak platí: $\sim$ je pravou kongruencí právě tehdy, když $\forall\, u, v \in \Sigma^*$: $u \sim v \Rightarrow \forall\, w \in \Sigma^* : u.w \sim v.w$

Myhillova-Nerodova věta (*upravená a jen část*)

- Nechť L je jazyk nad abecedou Σ. Pak platí: L je regulární $\Rightarrow$ existuje pravá kongruence $\sim$ konečného indexu k taková, že jazyk L je sjednocením některých tříd rozkladu $\Sigma^*/\sim$

Příklad 4

Myhillova-Nerodova věta

Rozhodněte, zda následující jazyky jsou, nebo nejsou regulární

- $L_{4.1} = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$
- $L_{4.2} = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j \mid i, j \in \mathbb{N}_0, i \neq j\}$
- $L_{4.3} = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j \mid i, j \in \mathbb{N}_0, i < j\}$
- $L_{4.4} = \{\mathtt{a}ww \mid w \in \{\mathtt{b}, \mathtt{c}\}^*\}$

Příklad 5

Uzávěrové vlastnosti

Rozhodněte, zda následující jazyk je, nebo není regulární

- $L_{5.1} = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j \mid i, j \in \mathbb{N}_0, i \neq j\}$

Bezkontextové gramatiky

Jednoznačnost gramatiky
Prázdnost jazyka
Zbytečné symboly: negenerující a nedostupné symboly
Epsilonová pravidla
Jednoduchá pravidla
Věta o dosazování

Příklad 1

Jednoznačnost gramatiky

Rozhodněte, zda je následující gramatika

$$G_1 = (\{S, T\}, \{1, 2\}, P, S)$$

s přepisovacími pravidly

$$S \to 1ST \,|\, \varepsilon$$
$$T \to 2 \,|\, \varepsilon$$

jednoznačná, nebo nejednoznačná

Příklad 2

Prázdnost jazyka

Mějme následující bezkontextovou gramatiku

$$G_2 = (\{S, A, B, C, D, E, F, G\}, \{1, 2\}, P, S)$$

s přepisovacími pravidly

$$\begin{aligned}
S &\to 2B1E \mid 1A & D &\to 2 \mid D \mid AS1 \mid AC \\
A &\to AA \mid 2AB & E &\to A2 \mid \varepsilon \mid D1 \\
B &\to B1 \mid 11 & F &\to SB \\
C &\to 2E \mid CC \mid A & G &\to 2A \mid A1A
\end{aligned}$$

Rozhodněte, zda generuje prázdný, nebo neprázdný jazyk

Příklad 3

Zbytečné symboly

Odstraňte zbytečné neterminální symboly z gramatiky G_2

Příklad 4

Epsilonová pravidla

Mějme následující bezkontextovou gramatiku

$$G_4 = (\{S, A, B, C, D\}, \{1, 2\}, P, S)$$

s přepisovacími pravidly

$$\begin{aligned}
S &\rightarrow AC \mid AB \mid 1 \\
A &\rightarrow 1A \mid \varepsilon \mid 2C \\
B &\rightarrow 22 \mid A \\
C &\rightarrow 2S \mid 2D \\
D &\rightarrow 1CA \mid \varepsilon \mid 1ACA
\end{aligned}$$

Odstraňte z této gramatiky epsilonová pravidla

Příklad 5

Jednoduchá pravidla

Mějme následující bezkontextovou gramatiku

$$G_5 = (\{S, A, B, C, D, E, F\}, \{1, 2\}, P, S)$$

s přepisovacími pravidly

$$
\begin{aligned}
S &\to 1A \mid DF \mid C \\
A &\to D \mid 1A \\
B &\to 2E \mid D \mid 1 \mid 1A \\
C &\to 1 \mid 22 \\
D &\to A \mid BB \mid D \\
E &\to C \mid \varepsilon \\
F &\to BB
\end{aligned}
$$

Odstraňte z této gramatiky jednoduchá pravidla

Příklad 6

Věta o dosazování

Mějme následující bezkontextovou gramatiku

$$G_6 = (\{S, A, B, C\}, \{1, 2\}, P, S)$$

s přepisovacími pravidly

$$S \to 1A \mid 2B \mid 1C2$$
$$A \to 1A \mid C \mid CAC2$$
$$B \to 11B \mid 11 \mid \varepsilon$$
$$C \to 11 \mid 1A$$

Použijte větu o dosazování na neterminály C a B

Chomského normální tvar

Příklad 1

Chomského normální tvar

Mějme následující vlastní bezkontextovou gramatiku bez jednoduchých pravidel

$$G_1 = (\{S, A, B, C\}, \{1, 2\}, P, S)$$

s přepisovacími pravidly

$$S \to \varepsilon \mid BC \mid 2 \mid 1B \mid 22 \mid 11A$$
$$A \to 1A \mid CBB22 \mid 111122$$
$$B \to 22 \mid BB \mid 1$$
$$C \to 22$$

Převeďte tuto gramatiku do Chomského normálního tvaru

Příklad 2

Chomského normální tvar

Mějme následující bezkontextovou gramatiku

$$G_2 = (\{S, A, B, C, D, E, F, G, H, I\}, \{0, 1, 2\}, P, S)$$

s přepisovacími pravidly

$$
\begin{aligned}
S &\to 0S \mid HA & E &\to D \mid 1A \mid 1HA \mid 0101 \\
A &\to 1A \mid 1B \mid 1E \mid \varepsilon & F &\to 0A \mid 1B \mid 0C \\
B &\to 1B1 \mid 0BA \mid 2G & G &\to BB \\
C &\to A1 \mid B0 & H &\to 1 \mid \varepsilon \mid 00B \\
D &\to D \mid 00 \mid I \mid 2FB & I &\to D \mid 11
\end{aligned}
$$

Převeďte tuto gramatiku do Chomského normálního tvaru

Jinými slovy odstraňte negenerující neterminály, nedostupné neterminály, epsilonová pravidla, jednoduchá pravidla, opět negenerující a nedostupné neterminály a nakonec proveďte samotnou transformaci

Levá rekurze u BG

Příklad 1

Odstranění levé rekurze

Mějme následující vlastní bezkontextovou gramatiku bez jednoduchých pravidel

$$G_1 = (\{S, A, B, C, D, E\}, \{1, 2\}, P, S)$$

s přepisovacími pravidly

$$\begin{aligned}
S &\to S1B \mid 2A \\
A &\to S2 \mid D1 \\
B &\to D1 \mid EC \\
C &\to B1 \mid B2 \mid 11 \\
D &\to E1 \mid 2 \\
E &\to B1 \mid 211 \mid 2E
\end{aligned}$$

Odstraňte z této gramatiky levou rekurzi

Příklad 2

Odstranění levé rekurze

Mějme následující bezkontextovou gramatiku

$$G_2 = (\{S, A, B, C, D\}, \{0, 1, 2\}, P, S)$$

s přepisovacími pravidly

$$S \to AB$$
$$A \to 0 \mid \varepsilon$$
$$B \to C2 \mid 1$$
$$C \to D10$$
$$D \to S1$$

Odstraňte z této gramatiky levou rekurzi

Příklad 3

Odstranění levé rekurze

Mějme následující bezkontextovou gramatiku

$$G_3 = (\{S, A, B\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}, P, S)$$

s přepisovacími pravidly

$$S \to SA\mathtt{b} \mid S\mathtt{bb} \mid A\mathtt{c} \mid \mathtt{aa}$$
$$A \to B\mathtt{b} \mid \varepsilon$$
$$B \to A\mathtt{c} \mid A\mathtt{a} \mid \mathtt{a} \mid \varepsilon$$

Odstraňte z této gramatiky levou rekurzi

Algoritmus CYK

Příklad 1

Algoritmus CYK

Pomocí algoritmu CYK rozhodnětě, zda je řetězec $\mathtt{010102}$ větou generovanou gramatikou

$$G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{\mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{2}\}, P, A)$$

s přepisovacími pravidly

$$\begin{aligned}
A &\to CD \mid BB \mid \mathtt{0} \\
B &\to BA \mid \mathtt{1} \mid \mathtt{2} \\
C &\to BA \mid \mathtt{2} \\
D &\to AD \mid BC \mid \mathtt{1} \mid \mathtt{2}
\end{aligned}$$

Příklad 2

Algoritmus CYK

Pomocí algoritmu CYK rozhodnětě, zda je řetězec $\mathtt{110100}$ větou generovanou gramatikou

$$G_2 = (\{A, B, C\}, \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}, P, A)$$

s přepisovacími pravidly

$$A \to BC \,|\, AB \,|\, \mathtt{1}$$
$$B \to AA \,|\, \mathtt{0}$$
$$C \to CB \,|\, \mathtt{1} \,|\, \mathtt{0}$$

Návrh zásobníkových automatů

Zásobníkové automaty

Zásobníkový automat je sedmice $R = (Q, \Sigma, G, \delta, q_0, Z_0, F)$, kde

- Q je **množina stavů**
- Σ je **vstupní abeceda**
- G je **zásobníková abeceda**
- δ je **přechodová funkce**: $Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times G^* \to \mathcal{P}(Q \times G^*)$
- $q_0 \in Q$ je **počáteční stav**
- $Z_0 \in G$ je **počáteční symbol** na zásobníku
- $F \subseteq Q$ je **množina koncových stavů**

Příklad 1

Návrh zásobníkových automatů

Navrhněte zásobníkové automaty pro následující jazyky

- $L_{1.1} = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^i \mid i \in \mathbb{N}_0, i \geq 0\}$
- $L_{1.2} = \{ww^R \mid w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*\}$
- $L_{1.3} = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j\mathtt{c}^k \mid i, j, k \in \mathbb{N}_0, i, j, k \geq 0, i + j = k\}$
- $L_{1.4} = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j\mathtt{c}^k \mid i, j, k \in \mathbb{N}_0, i, j, k \geq 0, i + k = j\}$
- $L_{1.5} = \{u\mathtt{c}v \mid u, v \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*, 2|u|_\mathtt{a} = 3|v|_\mathtt{b}\}$
- $L_{1.6} = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j \mid i, j \in \mathbb{N}_0, 2 \leq i \leq j \leq 2i\}$
- $L_{1.7} = \{w \mid w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*, |w|_\mathtt{a} = |w|_\mathtt{b}\}$
- $L_{1.8} = \{u\mathtt{c}v \mid u, v \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*, |u| \neq |v|\}$
- $L_{1.9} = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^{i-j}\mathtt{c}^{j+k}\mathtt{d}^{\lceil k/2 \rceil} \mid i, j, k \in \mathbb{N}_0, i \geq j\}$

Syntaktická analýza

Metoda shora dolů
Metoda zdola nahoru

Příklad 1

Top down syntaktická analýza

Zkonstruujte zásobníkový automat umožňující realizovat syntaktickou analýzu metodou shora dolů pro následující bezkontextovou gramatiku

$$G = (\{S, X, Y\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}, P, S)$$

s přepisovacími pravidly

$$S \to XY$$
$$X \to \mathtt{a}X\mathtt{b} \mid \mathtt{ab}$$
$$Y \to \mathtt{c}Y\mathtt{d} \mid \mathtt{cd}$$

Určete levý rozklad pro řetězec `aabbcd`

Příklad 2

Bottom up syntaktická analýza

Zkonstruujte zásobníkový automat umožňující realizovat syntaktickou analýzu metodou zdola nahoru pro následující bezkontextovou gramatiku

$$G = (\{S, X, Y\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}, P, S)$$

s přepisovacími pravidly

$$S \to XY$$
$$X \to \mathtt{a}X\mathtt{b} \mid \mathtt{ab}$$
$$Y \to \mathtt{c}Y\mathtt{d} \mid \mathtt{cd}$$

Určete pravý rozklad pro řetězec $\mathtt{aabbcd}$

Formální překlady

Konečné překladové automaty
Zásobníkové překladové automaty
Regulární překladové gramatiky
Bezkontextové překladové gramatiky

Překladové automaty

Konečný překladový automat je šestice $M = (Q, \Sigma, D, \delta, q_0, F)$, kde

- Q je **množina stavů**
- Σ je **vstupní abeceda**
- D je **výstupní abeceda**
- δ je **přechodová funkce**: $Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}(Q \times D^*)$
- $q_0 \in Q$ je **počáteční stav**
- $F \subseteq Q$ je **množina koncových stavů**

Příklad 1

Návrh KPA

Navrhněte konečné překladové automaty realizující následující formální překlady

- $Z_{1.1} = \{(\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j, \mathtt{x}^{i+j}) \mid i, j \in \mathbb{N}_0\}$
- $Z_{1.2} = \{(\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j\mathtt{c}^k, \mathtt{x}^{2i}\mathtt{y}^{\lfloor j/2 \rfloor}\mathtt{z}^{k \bmod 3}) \mid i, j, k \in \mathbb{N}_0, i > 0\}$
- $Z_{1.3} = \{(u, v) \mid u, v \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^*$, každý výskyt podřetězce $\mathtt{0101}$ nalezený v řetězci u se v řetězci v nahradí za $\mathtt{10}\}$
- $Z_{1.4} = \{(x, y) \mid x, y$ jsou čísla v ternární soustavě, x je dělitelné $4_{10} = 11_3$ se zbytkem 1_{10} nebo 3_{10} a $y = \lfloor x/4_{10} \rfloor\}$

Překladové automaty

Zásobníkový překladový automat je osmice $R = (Q, \Sigma, G, D, \delta, q_0, Z_0, F)$, kde

- Q je **množina stavů**
- Σ je **vstupní abeceda**
- G je **zásobníková abeceda**
- D je **výstupní abeceda**
- δ je **přechodová funkce**:
  $Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times G^* \to \mathcal{P}(Q \times G^* \times D^*)$
- $q_0 \in Q$ je **počáteční stav**
- $Z_0 \in G$ je **počáteční symbol** na zásobníku
- $F \subseteq Q$ je **množina koncových stavů**

Příklad 2

Návrh ZPA

Navrhněte zásobníkové překladové automaty realizující následující formální překlady

- $Z_{2.1} = \{(\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j, \mathtt{x}^j\mathtt{y}^i) \mid i, j \in \mathbb{N}_0\}$
- $Z_{2.2} = \{(u\mathtt{c}v, uu^R\mathtt{c}\mathtt{a}^i) \mid u, v \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*, i = |v|_\mathtt{a} + 2\}$
- $Z_{2.3} = \{(\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j\mathtt{c}^k, \mathtt{z}^{k \bmod 3}\mathtt{y}^{\lfloor j/2 \rfloor}\mathtt{x}^{2i}) \mid i, j, k \in \mathbb{N}_0, i > 0\}$
- $Z_{2.4} = \{(u\mathtt{c}v, \mathtt{x}^{|v|-|u|}) \mid u, v \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*, |u| \leq |v| \leq 2|u|\}$
- $Z_{2.5} = \{(\mathtt{a}^r\mathtt{b}^s\mathtt{c}^t\mathtt{d}^u, \mathtt{w}^r\mathtt{x}^{2s-2r}\mathtt{y}^{r+u}\mathtt{z}^{u-t}) \mid$
  $r, s, t, u \in \mathbb{N}_0, 0 \leq r \leq s, 0 \leq t \leq u\}$

Překladové gramatiky

Překladová gramatika je pětice $G = (N, T, D, R, S)$, kde

- N je **množina neterminálů**
- T je **množina terminálů**
- D je **množina výstupních symbolů**
  - $N \cap T = \emptyset$, $N \cap D = \emptyset$, $T \cap D = \emptyset$
- R je **množina přepisovacích pravidel**
  - Každé je ve tvaru $X \to \alpha$, kde $X \in N, \alpha \in (N \cup T \cup D)^*$
- $S \in N$ je **startovní neterminál**

Překladové gramatiky

Třída 2: **bezkontextová** překladová gramatika:

- $X \to \alpha$, kde $X \in N, \alpha \in (N \cup T \cup D)^*$

Třída 3: **regulární** překladová gramatika:

- $X \to auY$, kde $X, Y \in N, a \in T, u \in D^*$
- $X \to au$, kde $X \in N, a \in T, u \in D^*$
- $S \to \varepsilon, \dots$

Příklad 3

Návrh RPG

Navrhněte regulární překladové gramatiky realizující následující formální překlady

- $Z_{3.1} = \{(w, w) \mid w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*\}$
- $Z_{3.2} = \{(\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j, \mathtt{x}^{i+1}\mathtt{y}^{(j+1) \bmod 2}) \mid i, j \in \mathbb{N}_0, i > 0\}$

Příklad 4

Návrh BPG

Navrhněte (bezkontextové) překladové gramatiky realizující následující formální překlady

- $Z_{4.1} = \{(w, ⓦⓦ^R) \mid w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*\}$
- $Z_{4.2} = \{(u\mathtt{c}v, ⓤⓒⓥⓥ^R) \mid u, v \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*, |v| > 0\}$
- $Z_{4.3} = \{(\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j\mathtt{c}^k, x^{i+k}y^j) \mid i, j, k \in \mathbb{N}_0, i > j\}$
- $Z_{4.4} = \{(u\mathtt{c}v, \mathtt{x}^{|u|}\mathtt{y}^{|v|_b - |u|_a}) \mid u, v \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*, |u|_a \leq |v|_b \leq 3|u|_a\}$

Turingův stroj

Turingův stroj

Deterministický Turingův stroj je sedmice $T = (Q, \Sigma, G, \delta, q_0, \perp, F)$, kde

- Q je **množina stavů**
- Σ je **vstupní abeceda**
- G je **pracovní abeceda**
  - $\Sigma \subset G$
- δ je **přechodová funkce**: $(Q \setminus F) \times G \to Q \times G \times \{-, 0, +\}$
- $q_0 \in Q$ je **počáteční stav**
- $\perp$ je **prázdný symbol**
  - $\perp \in G, \perp \notin \Sigma$
- $F \subseteq Q$ je **množina koncových stavů**

Turingův stroj

Nedeterministický Turingův stroj je sedmice
$T = (Q, \Sigma, G, \delta, q_0, \perp, F)$, kde

- Q je **množina stavů**
- Σ je **vstupní abeceda**
- G je **pracovní abeceda**
  - $\Sigma \subset G$
- δ je **přechodová funkce**:
  $(Q \setminus F) \times G \to \mathcal{P}(Q \times G \times \{-, 0, +\})$
- $q_0 \in Q$ je **počáteční stav**
- $\perp$ je **prázdný symbol**
  - $\perp \in G, \perp \notin \Sigma$
- $F \subseteq Q$ je **množina koncových stavů**

Příklad 1

Intuitivní návrh DTS a NTS

Navrhněte Turingovy stroje pro následující jazyky

- $L_{1.1} = \{\mathtt{a}^i \,|\, i = 2k+1, k \in \mathbb{N}_0, k \geq 0\}$
- $L_{1.2} = \{u\mathtt{c}u \,|\, u \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*\}$
- $L_{1.3} = \{u \,|\, u \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*, u$ je palindrom $\}$
- $L_{1.4} = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j\mathtt{c}^k \,|\, i, j, k \in \mathbb{N}_0, i + k = j\}$
- $L_{1.5} = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^i\mathtt{c}^i \,|\, i \in \mathbb{N}_0, i \geq 0\}$

Základy složitosti

Třídy rozhodovacích problémů P a NP
Polynomiální redukce
NP-těžké a NP-úplné problémy

Příklad 1

Polynomiální redukce

Dokažte, že problém *Kachlíkování* je NP-úplný.