

<http://www.ksi.mff.cuni.cz/~svoboda/courses/171-BI-AAG/>

Cvičení

BI-AAG: Automaty a gramatiky

2017/18 ZS

Martin Svoboda

martin.svoboda@fit.cvut.cz

České vysoké učení technické v Praze, Fakulta informačních technologií

Formální jazyky

Chomského hierarchie

Popište Chomského hierarchii na klasifikaci formálních jazyků

- Pojmenujte jednotlivé typy gramatik, jazyků a automatů
- Uveďte požadavky na pravidla jednotlivých typů gramatik
- Popište vzájemné vztahy jednotlivých typů jazyků a gramatik

Příklad 1

Intuitivní návrh gramatik

Navrhňte gramatiky pro následující jazyky nad abecedou

$$\Sigma = \{a, i, o, y, n\}$$

- $L_1 = \{on, ona, ono\}$
- $L_2 = \{oni, ony\}$

Příklad 2

Operace nad jazyky

Zkonstruujte gramatiky pro následující jazyky

- $L_3 = L_1 \cup L_2$ (sjednocení jazyků)
- $L_4 = L_1.L_2$ (součin jazyků)
- $L_5 = L_1^*$ (iterace jazyka)

Příklad 3

Derivační stromy

Sestavte derivační strom pro větu 011011 gramatiky

$G = (\{A, B, C\}, \{0, 1\}, P, A)$ s množinou pravidel P

- $A \rightarrow 0BB1 \mid A0A$
- $B \rightarrow \epsilon \mid 1CA$
- $C \rightarrow AB \mid 0 \mid 1$

postupně očíslovaných od 1 do 7, a to pro derivaci

$$A \xrightarrow{1} 0BB1 \xrightarrow{4} 01CAB1 \xrightarrow{1} 01C0BB1B1 \xrightarrow{3} 01C0B1B1 \xrightarrow{7} 0110B1B1 \xrightarrow{3} 0110B11 \xrightarrow{3} 011011$$

Intuitivní návrh gramatik

Příklad 1

Intuitivní návrh gramatik

Navrhňte gramatiky pro následující jazyky

- $L_{1.1} = \{w \mid w \in \{0, 1\}^*, w \text{ je binární zápis sudého čísla}\}$
- $L_{1.2} = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, |w|_b = 3k, k \in \mathbb{N}_0, k \geq 0\}$

Příklad 2

Intuitivní návrh gramatik

Navrhněte gramatiky pro následující jazyky

- $L_{2.1} = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, w \text{ začíná na baba}\}$
- $L_{2.2} = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, w \text{ končí na baba}\}$
- $L_{2.3} = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, w \text{ obsahuje baba}\}$

Příklad 3

Intuitivní návrh gramatik

Navrhněte gramatiky pro následující jazyky

- $L_{3.1} = \{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}_0, i \geq 0\}$
- $L_{3.2} = \{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}_0, 3 \geq i \geq 0\}$
- $L_{3.3} = \{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}_0, i > 1\}$
- $L_{3.4} = \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}_0, i \geq j \geq 0\}$
- $L_{3.5} = \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}_0, i \neq j\}$
- $L_{3.6} = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \in \mathbb{N}_0, i + k = j\}$
- $L_{3.7} = \{vcw \mid v, w \in \{a, b\}^*, |v|_a \leq |w|_b\}$
- $L_{3.8} = \{a^i b^i c^i \mid i \in \mathbb{N}_0, i \geq 0\}$

Intuitivní návrh konečných automatů

Příklad 1

Intuitivní návrh KA

Navrhněte konečné automaty pro následující jazyky

- $L_{1.1} = \{a^i \mid i \in \mathbb{N}_0, i \geq 0\}$
- $L_{1.2} = \{a^i \mid i \in \mathbb{N}_0, i > 1\}$
- $L_{1.3} = \{\text{on, ona, ono}\}$
- $L_{1.4} = \{w \mid w \in \{0, 1\}^*, w \text{ je binární zápis lichého čísla}\}$
- $L_{1.5} = \{w \mid w \in \{0, 1\}^*, w \text{ je binární zápis sudého čísla}\}$
- $L_{1.6} = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, |w|_b = 3k + 1, k \in \mathbb{N}_0, k \geq 0\}$
- $L_{1.7} = \{w \mid w \in \{0, 1\}^*, w \text{ je binární zápis čísla dělitelného 3}\}$

Příklad 2

Intuitivní návrh KA

Navrhněte konečné automaty pro následující jazyky

- $L_{2.1} = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, w \text{ začíná na baba}\}$
- $L_{2.2} = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, w \text{ končí na baba}\}$
- $L_{2.3} = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, w \text{ obsahuje baba}\}$

Úpravy konečných automatů

Příklad 1

Dosažitelné a nedosažitelné stavy

Odstraňte nedosažitelné stavy z následujícího konečného automatu

		a	b
→	0	{1}	
←	1	{5,6}	{0,1}
	2		
	3	{2}	{1}
←	4		{3}
	5		{6}
←	6	{2,6}	{6}

Příklad 2

Užitečné a zbytečné stavy

Odstraňte zbytečné stavy z následujícího konečného automatu

		a	b
→	0	{1}	
←	1	{0,3}	{2}
	2		{3}
	3		
	4	{4}	{5}
←	5	{5}	
	6	{4}	{2,3}

Příklad 3

NKA s epsilon přechody

Odstraňte ϵ přechody z následujícího konečného automatu

		a	b	ϵ
\rightarrow	0	{0,4,5}		{1,2}
	1		{2}	
	2	{2}	{3,6}	{4}
\leftarrow	3		{3}	
\leftarrow	4	{3}		{3}
	5	{6}		
	6	{6}		{4}

Příklad 4

NKA s epsilon přechody

Odstraňte ϵ přechody z následujícího konečného automatu

		a	ϵ
\rightarrow	0	{3}	{1}
	1	{4}	{2}
	2	{5}	
	3		{1}
	4		{2}
\leftarrow	5		

Příklad 5

NKA s epsilon přechody

Odstraňte ϵ přechody z následujícího konečného automatu

		0	1	ϵ
\rightarrow	A		{I}	{C,I}
	B	{I}	{B,F}	{E}
\leftarrow	C	{H}	{E,F}	
\leftarrow	D	{B,E}	{C,D,G}	{B,C,D,G}
	E	{B}	{B}	{D}
	F		{A,G}	{D}
	G	{A,B}	{B}	
\leftarrow	H	{G}	{A,C}	{C}
	I	{E,H}	{F}	{C}

Příklad 6

NKA s více počátečními stavy

Odstraňte více počátečních stavů z následujícího konečného automatu

		0	1	2
\leftrightarrow	A		{D}	{C,D}
\leftarrow	B	{A,D}	{B}	{D}
\rightarrow	C	{B}		{C,D}
	D	{B}	{B,C}	{A}

Determinizace NKA

Příklad 1

Determinizace NKA

Pro následující NKA vytvořte ekvivalentní DKA

		0	1
→	S	{S}	{S,A}
	A	{B}	
←	B		{}

Příklad 2

Determinizace NKA

Pro následující NKA vytvořte ekvivalentní DKA

		a	b
\leftrightarrow	0	{0,2}	{1}
	1		{1,3}
\leftarrow	2		
	3	{0}	{2,3}

Příklad 3

Determinizace NKA

Pro následující NKA vytvořte ekvivalentní DKA

		0	1	2
\leftrightarrow	A	{B}	{D}	{C}
\leftarrow	B	{D}	{B}	{D}
\rightarrow	C	{C}	{A}	{D}
	D	{B}	{B}	{A}

Minimalizace DKA

Příklad 1

Minimalizace DKA

Pro následující DKA vytvořte ekvivalentní minimální DKA

		0	1	2
\leftrightarrow	A	D	H	H
\leftarrow	B	A	B	B
	C	A	E	G
	D	B	F	C
\leftarrow	E	A	E	G
\leftarrow	F	J	A	E
\leftarrow	G	A	G	B
	H	B	F	C
	I	K	H	I
\leftarrow	J	A	J	E
	K	A	A	F

Příklad 2

Minimalizace DKA

Pro následující DKA vytvořte ekvivalentní minimální DKA

		0	1
→	A	B	F
	B	G	C
←	C	A	I
	D	C	G
	E	H	F
	F	I	G
	G	G	E
	H	G	I
←	I	E	C

Příklad 3

Minimalizace DKA

Pro následující DKA vytvořte ekvivalentní minimální DKA

		0	1
←	A	B	C
	B	D	A
→	C		I
←	D		I
←	E	J	H
←	F	F	F
	G		J
	H	D	A
	I	E	A
	J	J	G

Operace nad konečnými automaty

Příklad 1

Intuitivní návrh KA

Navrhněte konečné automaty pro následující jazyky

- $L_1 = \{w \mid w \in \{0, 1\}^*, w \text{ začíná na } 11\}$
- $L_2 = \{w \mid w \in \{0, 1\}^*, |w|_0 \geq 2\}$

Příklad 2

Jazykové operace nad KA

Zkonstruujte konečné automaty pro následující jazyky

- $L_3 = L_1 \cup L_2$
- $L_4 = L_1 \cap L_2$
- $L_5 = \overline{L_1}$
- $L_6 = L_1 \cdot L_2$
- $L_7 = (L_1)^*$

Regulární výrazy

Příklad 1

Intuitivní návrh RV

Navrhněte regulární výrazy pro následující jazyky

- $L_{1.1} = \{w \mid w \in \{0, 1\}^*, w \text{ obsahuje } 0110\}$
- $L_{1.2} = \{w \mid w \in \{0, 1\}^*, |w| = 3k, k \in \mathbb{N}_0\}$
- $L_{1.3} = \{w \mid w \in \{0, 1\}^*, |w|_1 \geq 3\}$
- $L_{1.4} = \{w \mid w \in \{0, 1\}^*, w \text{ má sudý počet symbolů } 0\}$

Příklad 2

Zjednodušování RV

Zjednodušte následující regulární výrazy

- $r_{2.1} = 0^*(0^* + 1^*)$
- $r_{2.2} = 11^* + 0^*0 + \epsilon$
- $r_{2.3} = 0^*(1 + \epsilon)0^*(0 + 1)^*$

Příklad 3

Regulární rovnice

Vyřešte následující regulární rovnice

- $X = 01X + 1$
- $X = X1 + X01 + 2$
- $X = X + X(1 + 0^*1 + \epsilon)$

Příklad 4

Soustavy regulárních rovnic

Vyřešte následující soustavy regulárních rovnic

- $X = 01^*Y + 0X + 0$
 $Y = 1X + 1$
- $X = X0 + Y1 + 2^*$
 $Y = X01 + Y1 + 0$
- $X = 01X + 1^*Y + 01$
 $Y = 101Y + 1X + 0$
- $X = (01^* + 1)X + Y$
 $Y = 11 + 1X + 00Z$
 $Z = \epsilon + X + Y$

Příklad 5

Derivace RV

Určete derivace následujících regulárních výrazů

- $\frac{d(10^*1)}{d1}$
- $\frac{d(01+10)^*}{d0}$
- $\frac{d(10^*1)}{d(10)}$
- $\frac{d(10^*1^*0)}{d(011)}$
- $\frac{d(010+101+0^*1+1^*0)}{d0}$

Převody mezi KA, RG a RV

Příklad 1

Převod RG \rightarrow KA

Převeďte následující regulární gramatiku

$$(\{S, A, B\}, \{a, b, c\}, P, S)$$

s přepisovacími pravidly

$$S \rightarrow aA \mid bB \mid \epsilon$$

$$A \rightarrow aA \mid aB \mid c$$

$$B \rightarrow cA \mid b$$

na ekvivalentní konečný automat

Příklad 2

Převod KA \rightarrow RG

Převeďte následující automat na ekvivalentní regulární gramatiku

		0	1	2
\leftrightarrow	S	{S,A}	{B}	{}
	A	{B}	{C}	{A}
	B		{S}	{C}
\leftarrow	C	{C}	{}	

Příklad 3

Převod RV \rightarrow KA

Převeďte následující regulární výraz

$$(a + b)^* \cdot (\emptyset^* + \epsilon) \cdot ab$$

na ekvivalentní konečný automat

Použijte metodu derivací a metodu sousedů

Příklad 4

Převod KA \rightarrow RV

Převeďte následující automat na ekvivalentní regulární výraz

		0	1	2
\leftrightarrow	A	{A}	{B}	{B}
\leftarrow	B	{B}		

Použijte metody levých a pravých regulárních rovnic

Příklad 5

Převod KA \rightarrow RV

Převeďte následující automat na ekvivalentní regulární výraz

		0	1	2
\leftrightarrow	A	{A}	{B}	{B}
\leftarrow	B	{B}	{C}	
	C		{A,B}	

Použijte metodu eliminace stavů

Příklad 6

Převod RG \rightarrow RV

Převeďte následující regulární gramatiku

$$(\{S, A\}, \{0, 1, 2\}, P, S)$$

s přepisovacími pravidly

$$S \rightarrow 0S \mid 1A \mid 1$$

$$A \rightarrow 2A \mid 0$$

na ekvivalentní regulární výraz

Použijte metodu pravých regulárních rovnic

Příklad 7

Převod RG \rightarrow RV

Převeďte následující regulární gramatiku

$$(\{S, A, B\}, \{0, 1, 2\}, P, S)$$

s přepisovacími pravidly

$$S \rightarrow 0A \mid 0B \mid \epsilon$$

$$A \rightarrow 0A \mid 0B$$

$$B \rightarrow 1 \mid 2$$

na ekvivalentní regulární výraz

Použijte metodu eliminace neterminálních symbolů

Příklad 8

Převod RV \rightarrow RG

Převeďte následující regulární výraz

$$(00 + 11)^*$$

na ekvivalentní regulární gramatiku

Použijte metodu derivací

BG a jejich úpravy

Příklad 1

Jednoznačnost gramatiky

Rozhodněte, zda je následující gramatika

$$G_1 = (\{S, T\}, \{1, 2\}, P, S)$$

s přepisovacími pravidly

$$S \rightarrow 1ST \mid \epsilon$$

$$T \rightarrow 2 \mid \epsilon$$

jednoznačná, nebo nejednoznačná

Příklad 2

Prázdnot jazyka

Rozhodněte, zda následující gramatika

$$G_2 = (\{S, A, B, C, D, E, F, G, H, I\}, \{0, 1, 2\}, P, S)$$

s přepisovacími pravidly

$$S \rightarrow 0S \mid HA$$

$$A \rightarrow 1A \mid 1B \mid 1E \mid \epsilon$$

$$B \rightarrow 1B1 \mid 0BA \mid 2G$$

$$C \rightarrow A1 \mid B0$$

$$D \rightarrow D \mid 00 \mid I \mid 2FB$$

$$E \rightarrow D \mid 1A \mid 1HA \mid 0101$$

$$F \rightarrow 0A \mid 1B \mid 0C$$

$$G \rightarrow BB$$

$$H \rightarrow 1 \mid \epsilon \mid 00B$$

$$I \rightarrow D \mid 11$$

generuje prázdný, nebo neprázdný jazyk

Příklad 3

Zbytečné symboly

Odstraňte zbytečné neterminální symboly z gramatiky G_2

Příklad 4

Epsilon pravidla

Odstraňte epsilon pravidla z gramatiky vzniklé jako řešení předchozího příkladu

Příklad 5

Jednoduchá pravidla

Odstraňte jednoduchá pravidla z gramatiky vzniklé jako řešení předchozího příkladu

Příklad 6

Věta o dosazování

Pomocí věty o vyloučení pravidla vhodným způsobem upravte gramatiku vzniklou jako řešení předchozího příkladu

Chomského normální tvar

Příklad 7

Chomského normální tvar

Převeďte gramatiku vzniklou jako řešení předchozího příkladu do Chomského normálního tvaru

Algorithmus CYK

Příklad 1

Algoritmus CYK

Pomocí algoritmu CYK rozhodnětě, zda je řetězec 110100 větou generovanou gramatikou

$$G_1 = (\{A, B, C\}, \{0, 1\}, P, A)$$

s přepisovacími pravidly

$$A \rightarrow BC \mid AB \mid 1$$

$$B \rightarrow AA \mid 0$$

$$C \rightarrow CB \mid 1 \mid 0$$

Odstranění levé rekurze u BG

Příklad 1

Odstranění levé rekurze

Odstraňte levou rekurzi z gramatiky

$$G_3 = (\{S, A, B, C, D\}, \{0, 1, 2\}, P, S)$$

s přepisovacími pravidly

$$S \rightarrow AB$$

$$A \rightarrow 0 \mid \epsilon$$

$$B \rightarrow C2 \mid 1$$

$$C \rightarrow D10$$

$$D \rightarrow S1$$

Příklad 2

Odstranění levé rekurze

Odstraňte levou rekurzi z gramatiky

$$G_4 = (\{S, A, B\}, \{a, b, c\}, P, S)$$

s přepisovacími pravidly

$$S \rightarrow SAb \mid Sbb \mid Ac \mid aa$$

$$A \rightarrow Bb \mid \epsilon$$

$$B \rightarrow Ac \mid Aa \mid a \mid \epsilon$$

Návrh zásobníkových automatů

Příklad 1

Návrh zásobníkových automatů

Navrhněte zásobníkové automaty pro následující jazyky

- $L_{1.1} = \{a^i b^i \mid i \geq 0, i \in \mathbb{N}_0\}$
- $L_{1.2} = \{a^i b^j c^i \mid i \geq 0, j > 1, i, j \in \mathbb{N}_0\}$
- $L_{1.3} = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0, i, j, k \in \mathbb{N}_0, i + j = k\}$
- $L_{1.4} = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0, i, j, k \in \mathbb{N}_0, i + k = j\}$
- $L_{1.5} = \{a^i b^j \mid 2 \leq i \leq j \leq 2i, i, j \in \mathbb{N}_0\}$
- $L_{1.6} = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, |w|_a = |w|_b\}$

Pumping lemma

Příklad 1

Pumping lemma

Rozhodněte, zda následující jazyky jsou, nebo nejsou regulární

- $L_1 = \{a^i b^i \mid i \geq 0 \wedge i \in \mathbb{N}_0\}$
- $L_2 = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$
- $L_3 = \{a^i b^j \mid 0 \leq i \leq j \wedge i, j \in \mathbb{N}_0\}$
- $L_4 = \{a^i b^j \mid i > j \geq 0 \wedge i, j \in \mathbb{N}_0\}$
- $L_5 = \{a^i b^j c^k \mid i + k = j \wedge i, j, k \geq 0 \wedge i, j, k \in \mathbb{N}_0\}$
- $L_6 = \{a^i b^i \mid i \geq 2 \wedge i \in \mathbb{N}_0\}$
- $L_7 = \{a^i b^j \mid 0 \leq i \leq 2j \wedge i, j \in \mathbb{N}_0\}$
- $L_8 = \{aa^w \mid w \in \{b, c\}^* \wedge |w|_b = |w|_c\}$
- $L_9 = \{a^{i^2} \mid i \geq 0 \wedge i \in \mathbb{N}_0\}$
- $L_{10} = \{a^i b^j \mid i \neq j \wedge i, j \geq 0 \wedge i, j \in \mathbb{N}_0\}$

Příklad 1: Náповěda

Pumping lemma

- $u_1 = a^p b^p, k_1 \neq 1, k_1 \in \mathbb{N}_0$
- $u_2 = a^p b b a^p, k_2 \neq 1, k_2 \in \mathbb{N}_0$
- $u_3 = a^p b^p, k_3 \geq 2, k_3 \in \mathbb{N}_0$
- $u_4 = a^p b^{p-1}, k_4 = 0$
- $u_5 = a^p b^p, k_5 \neq 1, k_5 \in \mathbb{N}_0$
- $u_6 = a^{p+1} b^{p+1}, k_6 \neq 1, k_6 \in \mathbb{N}_0$
- $u_7 = a^p b^p, k_7 \geq p + 2, k_7 \in \mathbb{N}_0$
- $u_8 = a a b^p c^p, k_8 \neq 1, k_8 \in \mathbb{N}_0$
- $u_9 = a^{p^2}, k_9 = 2$
- $u_{10} = a^p b^{p+p!}, k_{10} = 1 + \frac{p!}{s}, s = |y|, 1 \leq s \leq p, s \in \mathbb{N}_0$

Syntaktická analýza

Příklad 1

Top down syntaktická analýza

Zkonstruujte zásobníkový automat umožňující realizovat syntaktickou analýzu metodou shora dolů pro následující bezkontextovou gramatiku

$$G = (\{S, X, Y\}, \{a, b, c, d\}, P, S)$$

s přepisovacími pravidly

$$S \rightarrow XY$$

$$X \rightarrow aXb \mid ab$$

$$Y \rightarrow cYd \mid cd$$

Určete levý rozklad pro řetězec aabbcd

Příklad 2

Bottom up syntaktická analýza

Zkonstruujte zásobníkový automat umožňující realizovat syntaktickou analýzu metodou zdola nahoru pro následující bezkontextovou gramatiku

$$G = (\{S, X, Y\}, \{a, b, c, d\}, P, S)$$

s přepisovacími pravidly

$$S \rightarrow XY$$

$$X \rightarrow aXb \mid ab$$

$$Y \rightarrow cYd \mid cd$$

Určete pravý rozklad pro řetězec aabbcd

Formální překlady

Příklad 1

Návrh KPA

Navrhněte konečný překládový automat realizující formální překlad

$$Z_1 = \{(x, y) \mid x, y \text{ jsou čísla v ternární soustavě, } y = \lfloor x/4 \rfloor\}$$

Příklad 2

Návrh RPG a BPG

Navrhněte regulární nebo bezkontextové překladové gramatiky realizující následující formální překlady

- $Z_{2.1} = \{(w, w) \mid w \in \{a, b\}^*\}$
- $Z_{2.2} = \{(w, w^R) \mid w \in \{a, b\}^*\}$
- $Z_{2.3} = \{(w, ww^R) \mid w \in \{a, b\}^*\}$
- $Z_{2.4} = \{(ucv, ucvv^R) \mid u, v \in \{a, b\}^* \wedge |v| > 0\}$
- $Z_{2.5} = \{(a^i b^j c^k, x^{i+k} y^j) \mid i, j, k \geq 0 \wedge i, j, k \in \mathbb{N}_0\}$
- $Z_{2.6} = \{(a^i b^j c^k, x^{i+k} y^j) \mid i, j, k \geq 0 \wedge j < i \wedge i, j, k \in \mathbb{N}_0\}$

Příklad 3

Návrh ZPA

Navrhněte zásobníkové překladové automaty realizující následující formální překlady

- $Z_{3.1} = \{(w, ww^R) \mid w \in \{a, b\}^*\}$
- $Z_{3.2} = \{(ucv, uu^Rca^i) \mid u, v \in \{a, b\}^*, i = |v|_a + 2\}$
- $Z_{3.3} = \{(a^r b^s c^t d^u, w^r x^{2s-2r} y^{r+u} z^{u-t}) \mid 0 \leq r \leq s \wedge 0 \leq t \leq u \wedge r, s, t, u \in \mathbb{N}_0\}$