DJ2 – vyjadřovací síla
slajdy k přednášce NDBI006

J. Pokorný

MFF UK

Sylabus pro DJ2

1. Tři sémantiky DRK. Definitní a bezpečné formule DRK. Důkaz ekvivalence RA a DRK omezeného na definitní formule.
2. Důkaz věty o nemožnosti vyjádřit tranzitivní uzávěr relace v relační algebře.
3. Kompozice výrazů relační algebry, nejmenší pevný bod zobrazení, minimální pevný bod.
4. Datalog - tři možné sémantiky jazyka. Vyhodnocení logického programu bez rekurze.
5. Datalog s rekurzí. Naivní metoda vyhodnocení, metoda diferencí.
6. Datalog s negací, stratifikace. Vyjadřovací síla Datalogu. Vztah k dalším relačním jazykům. Deduktivní databáze. Logické problémy informačních systémů.
7. Rekurzivní SQL
8. Herbrandovské struktury a báze, svazy a Tarského věta o fixpointu, produkční operátor
9. Disjunktivní Datalog
10. Tabulkové dotazy
11 Složitost dotazovacích problemů a statická analýza dotazů
12. Dotazování s užívatelskými preferencemi
13. Web jako databáze. Dotazovací jazyky na Webem. SPARQL

Sémantika DRK (1)

Předpoklady: výrazy dotazu $\{x_1,...,x_k \mid A(x_1,...,x_k)\}$, A je formule DRK,

databáze $\mathbf{R}^*$, *dom* je doména pro **R**, *aktuální doména* formule A, *adom*(*A*), je množina hodnot z relací v *A* a konstant v *A*.

Tři problémy:

- potenciální možnost nekonečné odpovědi (v případě nekonečné *dom*)
- situace, kdy TRUE-ohodnocení volných proměnných není z databáze.
- jak implementovat vyhodnocení kvantifikace (v případě nekonečné *dom*) v konečném čase.

Sémantika DRK (2)

Sémantiky pro DRK, které problémy řeší.

(i) neomezená interpretace s omezeným výstupem

(ii) omezená interpretace

(iii) doménově nezávislé dotazy

Značení: výsledek vyhodnocení dotazu *D* v neomezené interpretaci jako $D^{dom}[\mathbf{R}^*]$.

Pak:

- pro (i) je výsledek definován jako $D^{dom}[\mathbf{R}^*] \cap adom^k$, kde *k* je řád výsledné relace.
- pro (ii) pouze přes hodnoty z *adom*, tj. $D^{adom}[\mathbf{R}^*]$.

Sémantika DRK (3)

D.: $\{x \mid \neg R(A{:}x)\}$

$\Rightarrow$ Odpověď je závislá na *dom*(*A*).

$\Rightarrow$ Výraz dotazu definuje pro různé domény různé dotazy.

Pz.: Doménově závislým může být i dotaz, který vrací $\emptyset$, např.

D.: $\{x \mid \forall y\, R(x,y)\}$

v případě, že se kvantifikuje přes nekonečnou doménu.

Df.: Výraz dotazu nazveme *doménově nezávislým* (*definitním, určitým*), jestliže odpověď na něj nezávisí na *dom*.

Dotazovací jazyk je *doménově nezávislý*, jestliže každý jeho výraz je doménově nezávislý. Výsledek dotazu *D* je roven $D^{dom}[\mathbf{R}^*] = D^{adom}[\mathbf{R}^*]$.

Sémantika DRK (4)

$\Rightarrow$ vyhodnocení doménově nezávislého výrazu v neomezené interpretaci dává stejný výsledek jako v omezené interpretaci.

Př.:

$\neg$ KNIHA(TITUL:'Úvod do DBS',AUTOR:a)

NENÍ definitní.

$\exists$ič (EXEMPLÁŘ(ič,d) $\wedge$ VÝPŮJČKA(ič,č,z))

JE definitní

$\exists$ič (EXEMPLÁŘ(ič,d) $\vee$ VÝPŮJČKA(ič,č,z))

NENÍ definitní, jsou-li proměnné netypované nebo s příliš "širokými" typy

Tv.: (Di Paola 1969)

Definitnost A není rozhodnutelná.

$\Rightarrow$ jazyk doménově nezávislých formulí není rozhodnutelný.

Pz.: Relační algebra je doménově nezávislý jazyk.

Sémantika DRK (5)

Značení DRK:

- v neomezené interpretaci s omezeným výstupem DRK^{rout},
- v omezené interpretaci DRK^{lim}
- doménově nezávislé výrazy DRK^{ind}.

Tv.: $DRK^{rout} \cong DRK^{lim} \cong DRK^{ind}$. Navíc,

(i) je-li *D* výraz DRK, pak existuje doménově nezávislý výraz D‘, který po vyhodnocení dá stejný výsledek jako D v neomezené interpretaci s omezeným výstupem.

(ii) je-li *D* výraz DRK, pak existuje doménově nezávislý výraz D‘, který po vyhodnocení dá stejný výsledek jako D v omezená interpretaci.

Sémantika DRK (6)

Důkaz (část): Triviálně DRK^{rout} a DRK^{lim} jsou minimálně tak silné jako DRK^{ind}, tj. $DRK^{ind} < DRK^{lim}$ a $DRK^{rout} < DRK^{lim}$

- Ukážeme sílu DRK^{lim}

Je-li $D \in DRK^{ind}$, pak vrací $D^{dom}[\mathbf{R}^*]$, přičemž $D^{dom}[\mathbf{R}^*] = D^{adom}[\mathbf{R}^*]$.

Nechť $D \in DRK$. K němu lze sestrojit D‘ tak, že všechny volné a vázané proměnné ve formuli dotazu D‘ jsou omezené na aktivní doménu. Pak $D'^{adom}[\mathbf{R}^*] = D^{adom}[\mathbf{R}^*]$. Výraz D‘ je ovšem doménově nezávislý, takže $DRK^{lim} < DRK^{ind}$. Zároveň jsme demonstrovali část (ii) tvrzení. Platí tedy $DRK^{lim} \cong DRK^{ind}$.

- Platí, že DRK^{rout} silnější než DRK^{lim}. Důkaz (i) je technicky složitější (viz [Hull a Su 94]).

Bezpečné formule DRK

Df.: *Bezpečná formule* DRK, *A*, je formule DRK, která je definitní a syntakticky charakterizovatelná.

1. má eliminovaný $\forall$, $\Rightarrow$
2. je-li v A obsažena disjunkce, pak je podformulí

   $\varphi_1(x_1,\ldots,x_s) \vee \varphi_2(x_1,\ldots,x_s)$,

   tj. φ_ι obsahují stejné volné proměnné,
3. je-li v A obsažena konjunkce (maximální), např.

   $\varphi \equiv \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_r$, $r \geq 1$, pak každá volná proměnná ve

   φ je omezená, tj. platí pro ni alespoň jedna

   z podmínek:

   - proměnná je volná ve φ_i , která není aritmetické porovnání a není negací,
   - existuje $\varphi_i \equiv x=a$, kde a je konstanta,
   - existuje $\varphi_i \equiv x=y$, kde y je omezená.

Bezpečné formule DRK

4. $\neg$ smí být použit pouze v konjunkcích typu 3.

Př.:

$x=y$ NENÍ bezpečná

$x=y \vee R(x,y)$ NENÍ bezpečná

$x=y \wedge R(x,y)$ JE bezpečná

$R(x,y,z) \wedge \neg (P(x,y) \vee Q(y,z))$ NENÍ bezpečná, je definitní.

$R(x,y,z) \wedge \neg P(x,y) \wedge \neg Q(y,z)$ je bezpečná!

Ekvivalence relačních jazyků

4 přístupy:

- doménový relační kalkul (DRK)
- n-ticový relační kalkul (NRK)
- relační algebra (A_R)
- DATALOG

Dokážeme: DRK $\cong A_R$

Lemma: Nechť φ je Boolský výraz vytvořený pomocí $\neg$, $\wedge$, $\vee$ a *jednoduchých selekcí* X θ Y nebo X θ *k*, kde $\theta \in \{\leq, \geq, \neq, <, >, =\}$, *k* je konstanta a X, Y jsou jména atributů. Pak k E(φ), kde E $\in A_R$ existuje relační výraz E', jehož každá selekce je jednoduchá a E(φ) $\cong$ E'.

Důkaz: 1. každá $\neg$ se propaguje k nějaké jednoduché selekci a θ se nahradí svou negací.

Ekvivalence relačních jazyků

2. indukcí podle počtu operátorů $\wedge$, $\vee$.

Pro $\emptyset$ operátorů - triviální

$E(\varphi) \equiv E(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ a E obsahuje nejvýše selekce, které jsou jednoduché. Pak $E(\varphi) \equiv E(\varphi_1)(\varphi_2)$.

$E(\varphi) \equiv E(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ a E obsahuje nejvýše selekce, které jsou jednoduché. Pak $E(\varphi) \equiv E(\varphi_1) \cup E(\varphi_2)$.

Př.: $E \equiv R(\neg\ (A_1 = A_2 \wedge (A_1 < A_3 \vee A_2 \leq A_3)\ )\ )$

pak $\varphi \equiv A_1 \neq A_2 \vee (A_1 \geq A_3 \wedge A_2 > A_3)$

a $E' \equiv R(A_1 \neq A_2) \cup R(A_1 \geq A_3)\,(A_2 > A_3)$

Od relační algebry k DRK

Tv.: Každý dotaz vyjádřitelný v A_R je vyjádřitelný DRK.

Důkaz: indukcí podle počtu operátorů v relačním výrazu E.

1. $\emptyset$ operátorů v E.

   $E \equiv R \rightarrow \{x_1,...,x_k \mid R(x_1,...,x_k)\}$

   $E \equiv$ konst. relace $\rightarrow \{x_1,...,x_k \mid x_1 = a_1 \wedge ... \wedge x_k = a_k \vee$
   $x_1 = b_1 \wedge ... \wedge x_k = b_k \vee ...\}$

2. $E \equiv E_1 \cup E_2$ podle indukční hypotézy existují formule e_1 a e_2 s volnými proměnnými $x_1,...,x_k$;

   $\rightarrow \{x_1,...,x_k \mid e_1(x_1,...,x_k) \vee e_2(x_1,...,x_k)\}$

3. $E \equiv E_1 - E_2$

   $\rightarrow \{x_1,...,x_k \mid e_1(x_1,...,x_k) \wedge \neg e_2(x_1,...,x_k)\}$

4. $E \equiv E_1[i_1,...,i_k]$

   $\rightarrow \{x_{i1},...,x_{ik} \mid \exists x_{j1},...,x_{j(n-k)}\, e_1(x_1,...,x_n)\}$

Od relační algebry k DRK

5. $E \equiv E_1 \times E_2$

$\rightarrow \{x_1,\ldots,x_m\, x_{m+1},\ldots,x_{m+n} \mid e_1(x_1,\ldots,x_m) \wedge e_2(x_{m+1},\ldots,x_{m+n})\}$

6. $E \equiv E_1(\varphi)$

$\rightarrow \{x_1,\ldots,x_k \mid e_1(x_1,\ldots,x_k) \wedge x_A\, \theta\, x_B)\}$, je-li $\varphi \equiv A\, \theta\, B$

nebo $x_A\, \theta\, a$ je-li $\varphi \equiv A\, \theta\, a$

Dle lemmatu stačí, když φ označuje jednoduchou selekci.

Sémantická definice definitních formulí

Postačující podmínky pro definitní formule *A*:

1. komponenty TRUE-ohodnocení *A* jsou z *adom*(*A*).
2. je-li $A' \equiv \exists y\ \varphi(y)$, pak je-li pro nějaké y_0 $\varphi(y_0) \Leftrightarrow$ TRUE, pak $y_0 \in adom(\varphi)$.
3. je-li $A' \equiv \forall y\ \varphi(y)$, pak je-li pro nějaké y_0 $\varphi(y_0) \Leftrightarrow$ FALSE, pak $y_0 \in adom(\varphi)$.

Pz.: 2. a 3. platí pro jakékoli přípustné hodnoty volných proměnných v φ (mimo y).

Pz.: vysvětlení podmínky 3.

$\forall y\ \varphi(y) \Leftrightarrow \neg\exists y\ \neg\varphi(y)$

$\Rightarrow$ je-li pro nějaké y_0 $\neg\varphi(y_0) \Leftrightarrow$ TRUE, pak podle 2. platí $y_0 \in adom(\neg\varphi)$.

Sémantická definice definitních formulí

Protože adom($\neg\varphi$) = adom(φ), pak

$\varphi(y_0) \Leftrightarrow$ FALSE $\Rightarrow y_0 \in$ adom(φ).

Tv.: Eliminace $\forall$ a $\wedge$ z definitní formule vede opět k definitní formuli.

Od DRK k relační algebře

Tv.: Každý dotaz vyjádřitelný definitním výrazem DRK je vyjádřitelný v A_R.

Důkaz: indukcí podle počtu operátorů v A definitního výrazu

$\{x_1,...,x_k \mid A(x_1,...,x_k)\}$ (+)

- *adom*(*A*) vyjádříme jako výraz A_R. Označíme ho E .
- *A* upravíme tak, že obsahuje pouze $\exists$, $\vee$, $\neg$.
- Důkaz bude pro $adom(A)^k \cap \{x_1,...,x_k \mid A'(x_1,...,x_k)\}$. Když $A' \equiv A$ a A je definitní, vede $\cap$ k výrazu (+).

Indukce:

1. $\emptyset$ operátorů v A'. Pak A' je atomická formule.

   $x_1 \ \theta \ x_2 \rightarrow (E \times E)(1 \ \theta \ 2)$

   $x_1 \ \theta \ a \rightarrow E(1 \ \theta \ a)$

   $R(x_1,...,x_m) \rightarrow R(... \wedge i_1 \ \theta \ i_2 \wedge ...)[..., i_1,...]$, bylo-li např. $x_{i1} = x_{i2}$

Od DRK k relační algebře

2. A' má alespoň jeden operátor a indukční hypotéza platí pro všechny podformule z A' s méně operátory než A'.
   - $A'(u_1,...,u_m) \equiv A^1(u_1,...,u_n) \vee A^2(u_1,...,u_p)$. Pak pro výrazy *adom*$(A)^m \cap \{\underline{u}|A^i(\underline{u})\}$ existují rel. výrazy E_i. Transformace vede na $\cup$.

     Př.: $A'(u_1,u_2,u_3,u_4) \equiv A^1(u_1,u_3,u_4) \vee A^2(u_2,u_4)$

     $\rightarrow (E_1 \times E)\ [1,4,2,3] \cup (E_2 \times E \times E)\ [3,1,4,2]$
   - $A'(u_1,...,u_m) \equiv \neg A^1(u_1,...,u_m)$. Pak pro výraz

     $adom(A)^m \cap \{\underline{u}|A^1(\underline{u})\}$ existuje rel. výraz E_1. Transformace vede na -, tj. $E^m - E_1$
   - $A'(u_1,...,u_m) \equiv \exists u_{m+1} A^1(u_1,...,u_m, u_{m+1})$. Pak pro výraz $adom(A)^{m+1} \cap \{\underline{u}|A^1(\underline{u})\}$ existuje rel. výraz E_1. Transformace vede na [], tj. $E_1[1,2,...,m]$

Jestliže $A' \equiv A$, pak odpověď se nezmění.

Od DRK k relační algebře

Př.: $\{w,x|\ R(w,x) \wedge \forall y(\neg S(w,y) \wedge \neg S(x,y))\}$ je definitní výraz.

Zdůvodnění: $dom(\neg S(w,y) \wedge \neg S(x,y)) = dom(S)$

Nechť $y_0 \notin dom(S)$. Pak $\neg S(w,y_0) \wedge \neg S(x,y_0) \Leftrightarrow TRUE$.

Tedy je splněna podmínka 3 z upřesnění definice defin. form.

Eliminací $\wedge$ a $\forall$ obdržíme definitní výraz:

$\{w,x|\neg (\neg R(w,x) \vee \exists y(S(w,y) \vee S(x,y))\}$

Transformace:

$S(w,y) \vee S(x,y) \rightarrow (S\times E)[1,3,2] \cup (S\times E)[3,1,2]$

$\exists y$ (-”-) $\rightarrow$ (-”-) [1, 2] označme jako E’

Pz.: E’ jde optimalizovat na $(S\times E)[1,3] \cup (S\times E)[3,1]$

$\neg R(w,x) \rightarrow E^2 - R$

$\neg R(w,x) \vee \exists y(S(w,y) \vee S(x,y) \rightarrow (E^2 - R) \cup E'$

$\neg$ (-”-) $\rightarrow E^2 - ((E^2 - R) \cup E')$

Od DRK k relační algebře

Problém: výsledek vede k neefektivnímu vyhodnocení

Optimalizace:

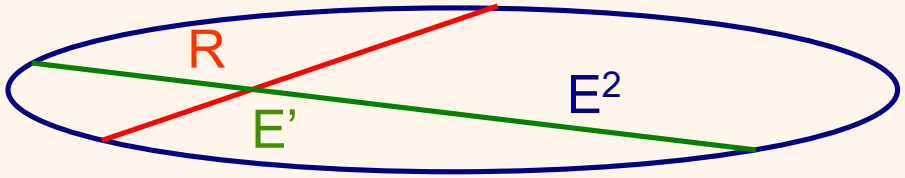
Nechť $\underline{X}$ označuje doplněk X do E. Platí:

$\underline{X \cup Y} = \underline{X} \cap \underline{Y}$

$\Rightarrow E^2 - ((E^2 - R) \cup E') = (E^2 - (E^2 - R)) \cap (E^2 - E')$
$=$

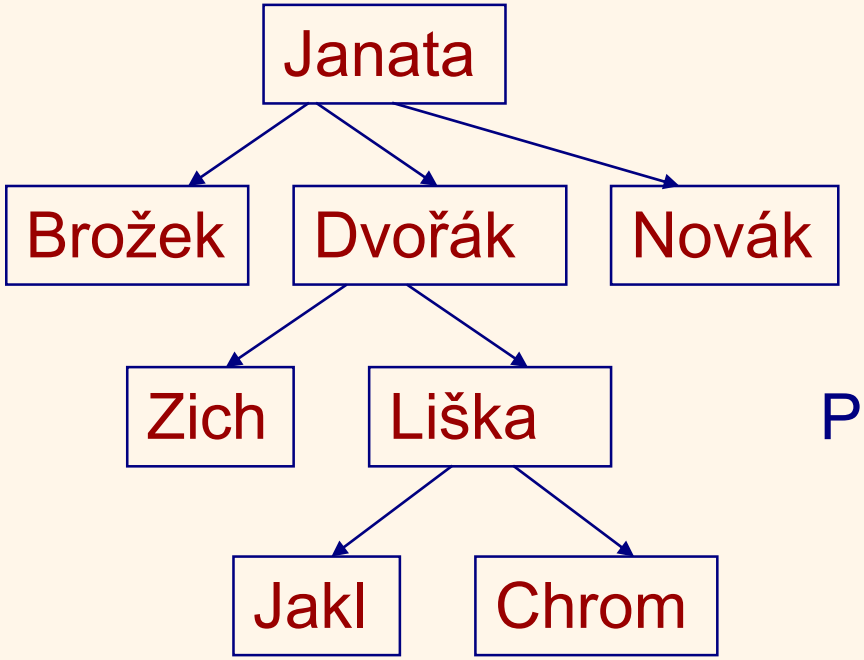
$R \cap \underline{E'} = R - E'$

Vizualizace:



Vyjadřovací síla DRK (A_R)

D.:Najdí všechny podřízené Dvořáka.

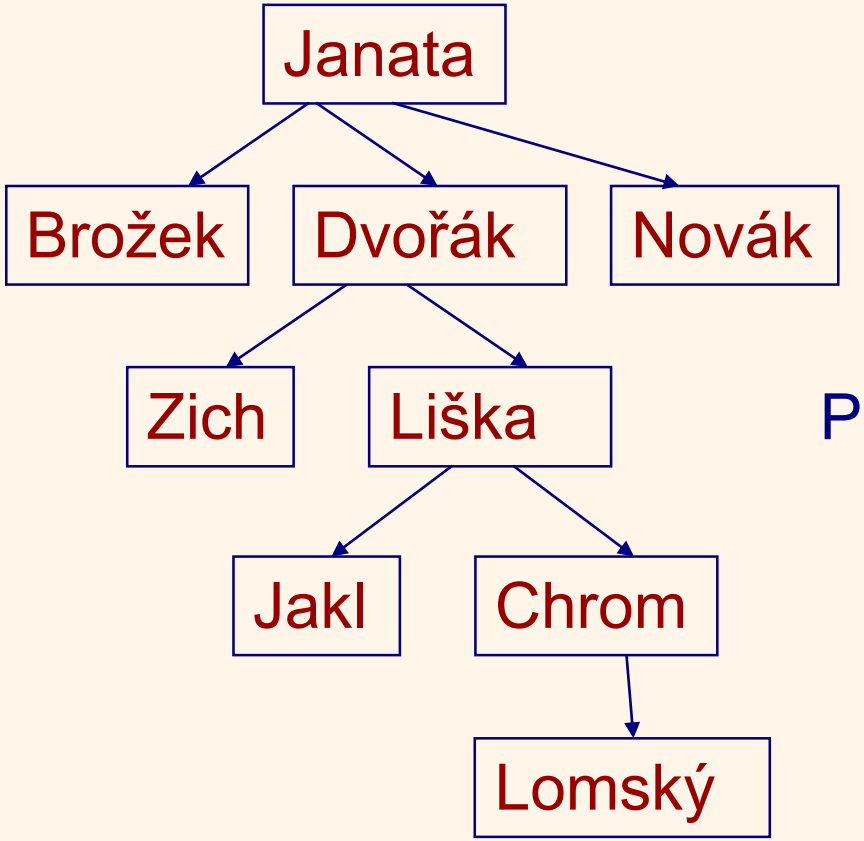


Pomocí:

- sjednocení
- 1 spojení
- projekce

Vyjadřovací síla DRK (A_R)

D.:Najdí všechny podřízené Dvořáka.



Pomocí

sjednocení

2 spojení

projekce

Dotaz na tranzitivní uzávěr (0)

Pojmy:

Df.: Binární relace R je *tranzitivní*, jestliže pro každé $(a,b) \in R$ a $(b,c) \in R$ také $(a,c) \in R$.

Df.: *Tranzitivní* uzávěr relace R, R^+, je nejmenší tranzitivní relace obsahující R.

V databázích: schéma relace R, relace R^*

Př.: NAD-POD(Nadřízený, Podřízený) vychází z tranzitivních vztahů na konceptuální úrovni.

NAD-POD* obsahuje pouze přímé vztahy, např. (Janata, Dvořák), (Liška, Chromý), …

Cíl: spočítat tranzitivní uzávěr relace NAD-POD*

Předpoklad: budeme uvažovat relace, které jsou tranzitivní na konceptuální úrovni.

Dotaz na tranzitivní uzávěr (1)

Tv.: Nechť R je schéma binární relace. Pak v A_R neexistuje výraz, který pro každou relaci R počítá její tranzitivní uzávěr R^+.

Důkaz:

1. Nechť $\Sigma_s = \{a_1, a_2, ..., a_s\}$, $s \geq 1$, je množina konstant, na které neexistuje uspořádání a

$$R_s = \{a_1a_2, a_2a_3, ..., a_{s-1}a_s\}$$

Pz.: $R_s \Leftrightarrow$ grafu $a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow ... \rightarrow a_s$, tj. transitivita je definovaná pomocí konektivity v orientovaném grafu.

Pz.: je-li na Σ_σ definováno uspořádání $<$, pak

$R_s^+ \cong (R_s[1] \times R_s[2])(1 < 2)$

2. Ukážeme, že pro libovolný výraz E(R) existuje *s* takové, že $E(R_s) \neq R_s^+$.

Dotaz na tranzitivní uzávěr (2)

3. Lemma: Je-li E výraz relační algebry, pak pro dostatečně velké *s*

   $E(R_s) \cong \{b_1,...,b_k \mid \Gamma(b_1,...,b_k)\}$,

kde $k \geq 1$ a Γ je formule v disjunktivní normální formě.

Atomické formule v Γ mají speciální tvar:

$b_i = a_j$, $b_i \neq a_j$,

$b_i = b_j + c$ nebo $b_i \neq b_j + c$, kde c je (ne nutně kladná) konstanta, přičemž

$b_j + c$ je zkratka pro "takové a_m, pro které $b_j = a_{m-c}$"

Doména interpretace pro ohodnocení proměnných b_j je Σ_s.

Pz.: $b_i = b_j + c \Leftrightarrow b_i$ je za b_j ve vzdálenosti *c* uzlů.

Dotaz na tranzitivní uzávěr (3)

4. Důkaz sporem.

- existuje E tak, že $E(R) = R^+$ a jakoukoliv relaci R, tj. i $E(R_s) = R_s^+$ pro dostatečně velká *s*
- dle lemmatu, $R_s^+ \cong \{b_1,b_2 \mid \Gamma(b_1,b_2)\}$

Nastávají dva případy:

(a) každá klauzule z Γ obsahuje atom tvaru

$b_1 = a_i$, $b_2 = a_i$ nebo $b_1 = b_2 + c$ ($\Leftrightarrow b_2 = b_1 - c$)

Nechť $b_1 b_2 = a_m a_{m+d}$,

kde $m >$ libovolné i a $d >$ libovolné c

Dotaz na tranzitivní uzávěr (4)

$\Rightarrow$ $b_1 = a_m$ a $b_2 = a_{m+d}$ nevyhovuje žádné klauzuli z Γ.

$\Rightarrow$ spor ($a_m a_{m+d} \notin R_s^+$)

(b) v Γ existuje klauzule s atomy obsahujícími *jen* $\neq$.

Nechť $b_1 b_2 = a_{m+d} a_m$, kde ani $b_i \neq a_m$ ani $b_i \neq a_{m+d}$

není obsaženo v Γ a $d > 0$ je větší než libovolné c

v $b_1 \neq b_2 + c$ nebo $b_2 \neq b_1 + c$ v Γ (viz konstrukce Γ)

$\Rightarrow$ $a_{m+d}\, a_m \in E(R_s)$ pro postačující s, ale $\notin R_s^+$ $\Rightarrow$ spor

Tedy: Pro jakýkoliv výraz E vždy existuje *s* pro něž

$$E(R_s) \neq R_s^+$$

Dotaz na tranzitivní uzávěr (5)

5. Důkaz lemmatu - indukcí dle počtu operátorů v E

I. $\emptyset$ operátorů $\Rightarrow$ $E \equiv R_s$ nebo E je relační konstanta stupně 1

$\Rightarrow E \equiv \{b_1, b_2 \mid b_2 = b_1 + 1\}$, resp.

$E \equiv \{b_1 \mid b_1 = c_1 \vee b_1 = c_2 \vee \ldots \vee b_1 = c_m\}$,

II. a) $E \equiv E_1 \cup E_2$, $E_1 - E_2$, $E_1 \times E_2$

$E_1 \cong \{b_1, \ldots, b_k \mid \Gamma_1(b_1, \ldots, b_k)\}$

$E_2 \cong \{b_1, \ldots, b_m \mid \Gamma_2(b_1, \ldots, b_m)\}$

$\Rightarrow$ pro $\cup$ a - je $k=m$ a tedy

Dotaz na tranzitivní uzávěr (6)

$E \cong \{b_1,...,b_k \mid \Gamma_1(b_1,...,b_k) \vee \Gamma_1(b_1,...,b_k)\}$, resp. ,

$E \cong \{b_1,...,b_k \mid \Gamma_1(b_1,...,b_k) \wedge \neg\, \Gamma_2(b_1,...,b_k)\}$,

$\Rightarrow$ pro $\times$

$E \cong \{b_1,...,b_k\, b_{k+1},...,b_{k+m} \mid \Gamma_1(b_1,...,b_k) \wedge \Gamma_2(\, b_{k+1},...,b_{k+m})\}$

!! pak následuje transformace do DNF.

b) $E \equiv E_1(\varphi)$ a φ obsahuje buď = nebo $\neq$

$\Rightarrow E \cong \{b_1,...,b_k \mid \Gamma_1\, (b_1,...,b_k) \wedge \varphi(b_1,...,b_k)\}$

Dotaz na tranzitivní uzávěr (7)

c) $E \equiv E_1[S]$

Budeme uvažovat projekci odstraňující jeden atribut

$\Rightarrow$ jde o posloupnost permutací proměnných a eliminaci poslední komponenty

eliminace b_k vede k

$\{b_1,\ldots,b_{k-1} \mid \exists\, b_k\, \Gamma(b_1,\ldots,b_k)\}$, kde Γ je v DNF

$\Rightarrow$ podle a)

$\cup_{i=1\ldots m}\{b_1,\ldots,b_{k-1} \mid \exists b_k \Gamma_i(b_1,\ldots,b_k)\}$

$\Rightarrow$ budeme eliminovat $\exists$ z jednoho konjunktu

- v Γ_i není $b_k=a_i$, $b_i=b_k+c$, $b_k=b_i+c$

$\Rightarrow$ $\{b_1,\ldots,b_{k-1} \mid \underline{\Gamma}_i(b_1,\ldots,b_{k-1})\}$

kde $\underline{\Gamma}_i$ neobsahuje $b_k \neq a_i$, $b_i \neq b_k+c$, $b_k \neq b_i+c$

Dotaz na tranzitivní uzávěr (8)

- v Γ_i je buď $b_k=a_i$, $b_i=b_k+c$, $b_k=b_i+c$

  $\Rightarrow$ provedou se substituce za b_k

  výsledky se upraví na TRUE

  nebo FALSE

  nebo $b_t=b_j+g$

  a přidají se: $b_i \neq a_j$ pro $s-c < j \leq s$, resp.

  $b_i \neq a_j$ pro $1 < j \leq c$

Tranzitivní uzávěr relace funkcionálně

Df.: *kompozice* R ° S binárních relací R, S definovaných na doméně D je binární relace

$$\{a,b \mid \exists c \in D, (a,c) \in R^* \wedge (c,b) \in S^*\}$$

Nechť f je funkce přiřazující binární relaci R binární relaci R´ (obě relace jsou definovány nad D).

Df.: Nechť R je relační proměnná a f(R) relační výraz. Pak *nejmenší pevný bod* (NPB) rovnice

$$R = f(R) \qquad (1)$$

je relace R* taková, že platí:

- $R^* = f(R^*)$ */pevný bod/*
- $S^* = f(S^*) \Rightarrow R^* \subseteq S^*$ */minimalita/*

Df.: f je *monotónní* jestliže pro každé dvě relace R^*_1 a R^*_2

$$R^*_1 \subseteq R^*_2 \Rightarrow f(R^*_1) \subseteq f(R^*_2)$$

Tranzitivní uzávěr relace funkcionálně

Tv.: f je monotónní právě když platí

$$f(R_1 \cup R_2) \supseteq f(R_1) \cup f(R_2)$$

Df.: f je *aditivní* právě když platí

$$f(R_1 \cup R_2) = f(R_1) \cup f(R_2)$$

Tv.: Aditivní funkce je monotónní

Tv.(Tarski): Je-li f monotónní, pak nejmenší pevný bod rovnice (1) existuje.

Konstrukce NPB:

NPB se získá pro konečnou relaci R opakovanou aplikací f.

Je-li $\emptyset$ výchozí, pak $f^{i-1}(\emptyset) \subseteq f^{i}(\emptyset)$

Pak existuje $n_0 \geq 1$ takové, že: ...

$$\emptyset \subset f(\emptyset) \subset f^{1}(\emptyset) \subset \ldots \subset f^{n0}(\emptyset) = f^{n0+1}(\emptyset)$$

Relace $f^{n0}(\emptyset)$ je NPB rovnice (1).

Tranzitivní uzávěr relace funkcionálně

Důkaz: indukcí podle *i* se ukáže, že relace $f^{n0}(\emptyset)$ je obsažena v každém pevném bodu rovnice (1).

Tv.: Tranzitivní uzávěr binární relace R* definované na D je NPB rovnice

$$S = S \circ R^* \cup R^*$$

kde S je relační proměnná (binární, def. na D).

Důkaz: $f(S) = S \circ R^* \cup R^*$

$\Rightarrow \quad f^n(\emptyset) = \cup_{i=1..n} R^* \circ R^* \circ \ldots \circ R^*$

což vede k tranzitivnímu uzávěru

$$\cup_{i = 1..\infty} R^* \circ R^* \circ \ldots \circ R^*$$

Tranzitivní uzávěr relace funkcionálně

Př.: Mějme schéma relace

LETADLA(Z, D, ODLET, PŘÍLET)

Úkol: vyjádřit SPOJE s přestupy

Řešení: SPOJE* je dána jako NPB rovnice

SPOJE = LETADLA $\cup$ (LETADLA $\times$ SPOJE)

$(2=5 \wedge 4< 7)[1, 6, 3, 8]$

Tv.: Každý výraz relační algebry neobsahující rozdíl je aditivní ve všech svých proměnných.

Pz.:

- nemonotónní výraz může mít NPB,
- je-li ve výrazu rozdíl, nemusí být výraz nemonotónní.

Tranzitivní uzávěr relace funkcionálně

Df.: *Minimální pevný bod* (MPB) rovnice (1) je takový pevný bod R*, že neexistuje žádný další její pevný bod, který je vlastní podmnožinou R*.

$\Rightarrow \exists$ NPB, pak je jediným MPB.

Existuje-li více MPB, pak jsou navzájem neporovnatelné a NPB neexistuje.

Databáze intenzionálně

Př.: mějme predikáty

F(x,y) x je otec y

M(x) x je muž

S(x,y) x je sourozencem y

B(x,y) x je bratr y

Extenzionální databáze (EDB):

F(Oldřich, Pavel) (1)

F(Oldřich, Jaroslav) (2)

F(Jaroslav, Veronika) (3)

Databáze intenzionálně

Intenzionální databáze (IDB):

M(x):- F(x,y) (4)

S(y,w) :- F(x,y), F(x,w) (5)

B(x,y) :- S(x,y),M(x) (6)

Dotazy:

D_1: Má Pavel bratra?

D_2: Najdi všechny (x,y), kde x je bratrem y

D_3: Najdi všechny (x,y), kde x je sourozencem y

Řešení LP rezoluční metodou

EDB jako množina tvrzení

IDB jako množina Hornových klauzulí:

$F(x,y) \Rightarrow M(x)$

$F(x,y) \wedge F(x,w) \Rightarrow S(y,w)$

$S(x,y) \wedge M(x) \Rightarrow B(x,y)$

Předpoklad: formule v IDB jsou univerzálně kvantifikované, např.:

$\forall x \forall y \forall w \; (F(x,y) \wedge F(x,w) \Rightarrow S(y,w))$

Reformulace D_1 : $\exists z \; B(z,Pavel)$

Řešení LP rezoluční metodou

Rezoluční metoda:

- odvození sporem
- odvoditelnost je ekvivalentní odvození prázdné klauzule (NIL) v ostatních případech nelze říci, zdali je klauzule odvoditelná

Princip: $A_1 \vee \ldots \vee A_i \vee B_1 \qquad C_1 \vee \ldots \vee C_j \vee \neg B_2$

- pomocí *unifikace*: substitucemi se snažíme dosáhnout toho, aby B_1 a B_2 byly komplementární
- odvození rezolventy: je-li po unifikaci tvar vstupu $\underline{A}_1 \vee \ldots \vee \underline{A}_i \vee B \qquad \underline{C}_1 \vee \ldots \vee \underline{C}_j \vee \neg B$, pak lze odvodit $\underline{A}_1 \vee \ldots \vee \underline{A}_i \vee \underline{C}_1 \vee \ldots \vee \underline{C}_j$

Řešení LP rezoluční metodou

Tv.: Rezolventa je (ne)splnitelná, byly-li vstupní klauzule (ne)splnitelné

Cíl procedury: odvodit NIL

Zdůvodnění:

$W=\{A_1,...,A_m\}$, pak $W \models A$ právě když

$A_1 \wedge ... \wedge A_m \wedge \neg A$ je nesplnitelná

Podle Gödelovy věty je nesplnitelnost částečně rozhodnutelná, tj. existuje procedura P tak, že pro každou formuli φ platí:

je-li φ nesplnitelná, $P(\varphi)$ se zastaví a oznámí to,

je-li φ splnitelná, $P(\varphi)$ buď skončí a oznámí to, nebo neskončí.

Řešení LP rezoluční metodou

Př.: k EDB a IDB přidáme ¬B(z,Pavel) (7)

a spustíme rezoluční metodu:

(8) S(Jaroslav,w) :- F(Oldřich,w)	z (2),(3)
(9) S(Jaroslav,Pavel)	z (8),(1)
(10) M(Jaroslav)	z (3),(4)
(11) B(Jaroslav,y) :- S(Jaroslav,y)	z (10),(6)
(12) B(Jaroslav,Pavel)	z (11),(9)
(13) NIL	z (12),(7)

Terminologie a omezení

- termy: proměnné nebo konstanty
- *tvrzení* (*fakty*) jsou atomické formule obsahující pouze konstanty
- *pravidla* jsou Hornovy klausule

  L_0:- $L_1,\ldots,L_n$

  kde jsou atomické (positivní) formule
- atomické formule nebo negace atomických formulí se nazývají *literály.*
- *positivní* a *negativní literály*
- tvrzení se nazývají *základní literály*

Terminologie a omezení

- struktura pravidla:

  L_0 *hlava pravidla*

  $L_1,\ldots,L_n$ *tělo pravidla*

Pz.: tvrzení i literály jsou Hornovy klauzule

DATALOG - syntaxe a sémantika (1)

1. *(data)logický program* je množinou tvrzení a pravidel
2. tři druhy predikátových symbolů
   - $R_i \in R$
   - S_i ... virtuální relace
   - vestavěné predikáty $\leq, \geq, \neq, <, >, =$

   R_i a S_i se nazývají *pravé.*

Pz.: $\neq$ nebudeme chápat jako negaci (budeme porovnávat pouze omezené proměnné)

3. sémantiku logických programů je možné vybudovat minimálně třemi různými způsoby:
   - logicko-odvozovacím přístupem,
   - logicko-modelovým přístupem,
   - pomocí pevného bodu zobrazení.

DATALOG - syntaxe a sémantika (2)

- *logicko-odvozovací přístup*

Metoda: interpretace pravidel jako axiomů použitelných k důkazu, tj. provádíme substituce v těle pravidel a odvozujeme nová tvrzení z hlavy pravidel. V případě DATALOGu tak lze získat *právě všechna* odvoditelná tvrzení.

- *logicko-modelový přístup*

Metoda: za predikátové symboly dosadíme relace tak, aby na nich byla splněna pravidla.

Př.: Uvažujme logický program LP

IDB: P(x) :- Q(x)
Q(x) :- R(x),

tj. Q a P označují virtuální relace.

DATALOG - syntaxe a sémantika (2)

- Nechť: R(1) Q(1) P(1)
  Q(2) P(2) M_1
  P(3)

Relace P*, Q*, R* tvoří model M_1 logického programu LP.

- Nechť: R(1) (a ostatní tvrzení mají hodnotu FALSE). Pak relace P*, Q*, R* netvoří model programu P.
- Nechť: R(1) Q(1) P(1) M_2

Pak relace P*, Q*, R* tvoří model M_2 logického programu LP.

Nechť EDB: R(1), tj. relační DB je dána jako
R* ={(1)}.

Pak M_1 i M_2 jsou s danou databází konzistentní.

DATALOG - závislostní graf (1)

- M_2 tvoří dokonce minimální model, tj. změníme-li v něm cokoliv, porušíme konzistenci.
- M_1 netvoří minimální model.

Pz.: při obou sémantikách obdržíme stejný výsledek.

Nevýhody obou přístupů: neefektivní algoritmy v případě, že EDB je dána databázovými relacemi.

- *pomocí pevného bodu zobrazení*

Metoda: vyhodnocovací algoritmus+relační db stroj

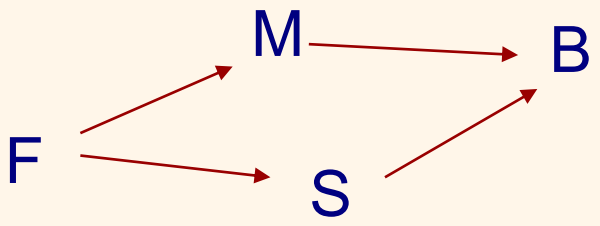
DATALOG - závislostní graf (2)

Df.: *závislostní graf* logického programu P

uzly: predikáty z R a IDB

hrany: (U,V) je hrana, existuje-li pravidlo

V :- … U ...



Př.: rozšíření původního příkladu

M(x):- F(x,y)

S‘(y,w) :- F(x,y), F(x,w), $y \neq w$

B(x,y) :- S‘(x,y), M(x)

C(x,y) :- F(x_1,x), F(x_2,y), S‘(x_1,x_2)

C(x,y) :- F(x_1,x), F(x_2,y), C(x_1,x_2)

DATALOG - závislostní graf (3)

R(x,y) :- S‘(x,y)

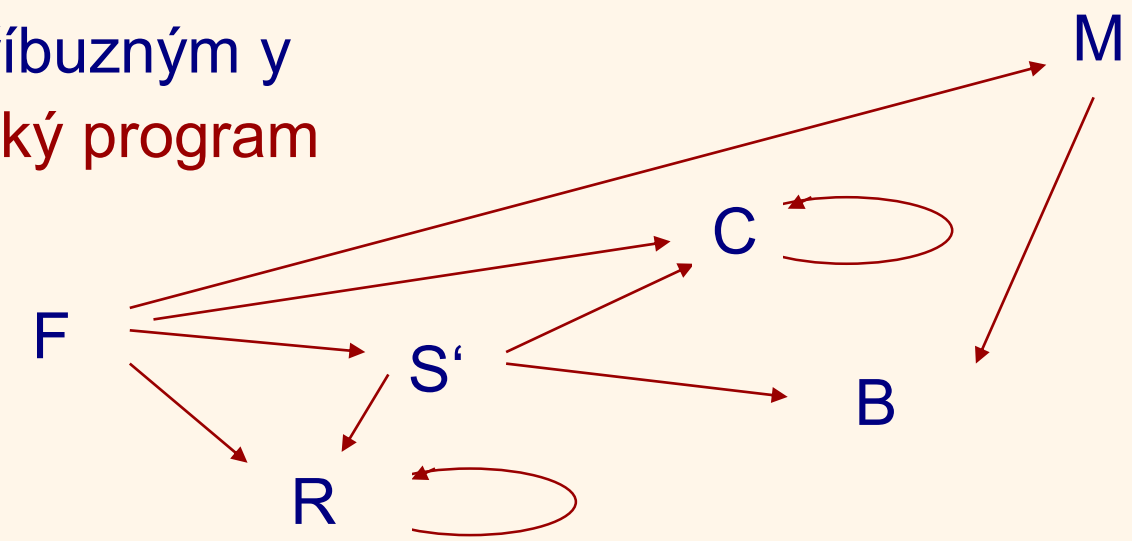
R(x,y) :- R(x,z), F(z,y)

R(x,y) :- R(z,y), F(z,x)

kde C(x,y) … x je bratrancem (sestřenicí) y, tj. mají otce bratry

R(x,y) … x je příbuzným y

rekurzivní datalogický program



DATALOG - závislostní graf (3)

R, C … *rekurzivní* predikáty

Df.: Logický program je *rekurzivní*, existuje-li v jeho závislostním grafu cyklus.

DATALOG - bezpečná pravidla

Df.: *bezpečné pravidlo*

Proměnnou x vyskytující se v pravidle nazveme *omezenou*, jestliže se vyskytuje v literálu L v těle tohoto pravidla, přičemž:

- L je dán pravým predikátem, nebo
- L má tvar x = a nebo a = x, nebo
- L má tvar x=y nebo y=x a y je omezená.

Pravidlo je *bezpečné*, jsou-li všechny jeho proměnné omezené.

Př.: bezpečnost pravidel

JE_VĚTŠÍ_NEŽ(x,y) :- x > y

PŘÁTELÉ(x,y) :- M(x)

S‘(y,w) :- F(x,y), F(x,w), y ≠ w

Nerekurzivní DATALOG

- jeho závislostní graf je acyklický
- topologické uspořádání uzlů tak, že $R_i \rightarrow R_j$ implikuje $i < j$

Pz.: uspořádání není dáno jednoznačně

Př.: uspořádání F - M - S - B

Nerekurzivní DATALOG

Princip algoritmu (pro jednu virtuální relaci):

(1) $U(x_1,\ldots,x_k)$:- $V_1(x_{i1},\ldots,x_{ik}),\ldots, V_s(x_{j1},\ldots,x_{js})$

převeď na spojení a selekce

(2) pro U se provede

projekce na výsledek

(3) kroky (1), (2) se provedou pro všechna pravidla s U v hlavě a dílčí výsledky

se sjednotí

Pz.: vzhledem k acykličnosti a topologickému uspořádání lze vždy provést kroky (1), (2) na nějaké pravidlo

Nerekurzivní DATALOG

Př.: konvence: proměnná x → atribut X

Přepis pravidla

- $C(x,y) :- F(x_1,x), F(x_2,y), S'(x_1,x_2)$

  1. krok:

  $POM(X1,X,X2,Y) = F(X1,X) * F(X2,Y) * S'(X1,X2)$

  2. krok:

  $C(X,Y) = POM[X,Y]$

- pro S'

  $S'(Y,W) = (F(X,Y) * F(X,W)) (Y \neq W)[Y,W]$

Nerekurzivní DATALOG

Další možnosti:

- V(x,y) :- P(a,x), R(x,x,z), U(y,z)

  1. a 2. krok:

  V(.,.) = (P(1=a)[2] * R(1=2)[1,3] * U)[.,.]

Problém: v hlavě pravidla mohou být konstanty, resp. stejné proměnné, různé pořadí proměnných

Požadavek na *rektifikaci*: transformace pravidel tak, aby hlavy se stejným predikátovým symbolem měly po řadě stejné proměnné

Nerekurzivní DATALOG

Př.: P(a,x,y) :- R(x,y)

P(x,y,x) :- R(y,x)

zavedeme u, v, w

substituce:

P(u,v,w) :- R(x,y), u = a, v = x, w = y

P(u,v,w) :- R(y,x), u = x, v = y, w = x

⇒ P(u,v,w) :- R(v,w), u = a,

P(u,v,w) :- R(v,u), w = u

Lemma:

(1) Je-li pravidlo bezpečné, pak po rektifikaci také.

(2) Původní a rektifikované pravidlo je ekvivalentní, tj. po jeho vyhodnocení obdržíme stejnou relaci.

Nerekurzivní DATALOG

Tv.: Vyhodnocený program poskytuje pro každý predikát z IDB množinu tvrzení, která tvoří

1. množinu právě těch tvrzení, dokazatelných z EDB aplikací pravidel z IDB.
2. pro EDB + IDB minimální model.

Důkaz: indukcí na pořadí pravidel.

Rekurzivní DATALOG

Př.:

POD_NAD(x,y):-PRACUJE_PRO(x,y)

POD_NAD(x,y):-PRACUJE_PRO(x,z), POD_NAD(z,y)

v EDB je relace PRACUJE_PRO(Jméno_z,Vedoucí)

POD_NAD* je tranzitivním uzávěrem relace PRACUJE_PRO*

Platí:

PRACUJE_PRO $\subseteq$ POD_NAD

(PRACUJE_PRO * POD_NAD)[1,3] $\subseteq$ POD_NAD

Rekurzivní DATALOG

$\Rightarrow$ POD_NAD* je řešením rovnice

(PRACUJE_PRO * POD_NAD)[1,3] $\cup$
PRACUJE_PRO = POD_NAD

Obecněji:

pro IDB existuje soustava rovnic

$E_i(P_1,\ldots,P_n) = P_i \qquad i=1,\ldots,n$

Řešení soustavy závisí na EDB a tvoří *pevný bod*.

Pz.: protože všechny použité operace A_R jsou aditivní, pevný bod existuje a dokonce nejmenší.

Rekurzivní DATALOG

Algoritmus: **(Naivní) vyhodnocení**

Vstup: EDB = $\{R_1,\ldots,R_k\}$, IDB = {pravidla pro $P_1,\ldots,P_n$},

Výstup: nejmenší pevný bod $P_1^*,\ldots,P_n^*$

Metoda: použije se funkce *eval*(E) vyhodnocující relační výraz E

<u>for</u> i:=1 <u>to</u> n <u>do</u> $P_i := \emptyset$;

<u>repeat</u> <u>for</u> i:=1 <u>to</u> n <u>do</u>

$Q_i := P_i$; *{ulož staré hodnoty}*

<u>for</u> i:=1 <u>to</u> n <u>do</u>

$P_i := \mathrm{eval}(E_i(P_1,\ldots,P_n))$

<u>until</u> $P_i = Q_i$ pro všechna i $\in\langle 1,n\rangle$

Pz.: Jde o tzv. Gauss-Seidelovu metodu

Rekurzivní DATALOG

Tv.: Vyhodnocovací algoritmus se zastaví a dá nejmenší pevný bod soustavy datalogických rovnic.

Důkaz:

(1) plyne z toho, že *eval* je monotónní a P_i* vznikají z konečného množství prvků.

(2) plyne z toho, že P_i* je řešení soustavy a navíc je součástí každého řešení pro každé i. Dokazuje se indukcí podle počtu iterací. Začíná se od $\emptyset$, která je součástí každého řešení.

Nevýhody:

- vytváření duplicitních n-tic
- vytváření zbytečně velkých relací, chceme-li ve výsledku selekci P_i*.

Rekurzivní DATALOG

Metoda diferencí

Idea: v (k+1). kroku iterace nepočítáme P_i^{k+1}, nýbrž

$D_i^{k+1} = P_i^{k+1} - P_i^k$, tj.

$P_i^{k+1} = P_i^k \cup D_i^{k+1}$ a tedy

$P_i^{k+1} = E_i(P_i^{k-1}) \cup E_i(D_i^k)$,

protože E_i je aditivní

Změna *eval* pro P_i danou jedním pravidlem:

pincreval$(E_i(\Delta P_1,\ldots,\Delta P_n))$

$= \cup_{j=1..n}$ *eval*$(E_i(\ldots,P_{j-1},\Delta P_j,P_{j+1},\ldots))$

Rekurzivní DATALOG

Změna eval pro P_i danou *s* pravidly:

$$\mathit{increval}(P_k;\Delta P_1,\ldots,\Delta P_n)) = \cup_{j=1..s}\, \mathit{pincreval}(E_j(\Delta P_1,\ldots,\Delta P_n))$$

Př.:

increval(S') = $\emptyset$

increval(C) =

(F(X1,X)*F(X2,Y)* ΔS'(X1,X2))[X,Y] $\cup$

(F(X1,X)*F(X2,Y)* ΔC(X1,X2))[X,Y]

increval(R) =

ΔS'(X,Y) $\cup$ (ΔR(X,Y)*F(Z,Y))[X,Y] $\cup$

(ΔR(Z,Y)*F(Z,X))[X,Y]

Rekurzivní DATALOG

Algoritmus: **(Polonaivní)vyhodnocení**

Vstup: EDB = $\{R_1,\ldots,R_k\}$, IDB = {pravidla pro $P_1,\ldots,P_n$},

Výstup: nejmenší pevný bod $P_1^*,\ldots,P_n^*$

Metoda: 1× se použije funkce *eval* a na diference increval

```
for i:=1 to n do
        ΔP_i := eval (E_i (∅,…,∅));
repeat  for i:=1 to n do ΔQ_i  := ΔP_i;                    {ulož staré diference}
        for i:=1 to n do   begin
                ΔP_i  := increval(E_i;(ΔQ_1,…,ΔQ_n, P_1,…, P_n))
                ΔP_i  := ΔP_i - P_i                        {odstraň duplicity}
                        end ;
        for i:=1 to n do P_i :=  P_i ∪ ΔP_i
        until Δ P_i = ∅ pro všechna i  ∈<1,n>
```

Rekurzivní DATALOG

Tv.: Vyhodnocovací algoritmus se zastaví a

- dá NPB soustavy datalogických rovnic,
- NPB odpovídá právě těm tvrzením, která jsou dokazatelná z EDB pomocí pravidel z IDB.

Př.: R(x,y) :- P(x,y)

R(x,y) :- R(x,z), R(z,y)

NPB R* je řešením rovnice

$$R(X,Y) = P(X,Y) \cup (R(X,Z)*R(Z,Y))[X,Y] \qquad (*)$$

- Je-li P* = {(1,2), (2,3)}, pak

  R* = {(1,2), (2,3), (1,3)} je NPB, jehož prvky odpovídají všem odvoditelným tvrzením,

  R* je i minimálním modelem.

Rekurzivní DATALOG

- Je-li (1,1) $\in$ R*, platí R(1,1) :- R(1,1),R(1,1), tedy i R* = {(1,1),(1,2), (2,3), (1,3)} je modelem a je řešením rovnice (*).
- Je-li (3,1) $\in$ R*, pak {(1,2), (2,3), (1,3), (3,1)} není modelem a ani není řešením rovnice.
- Nechť P* = $\emptyset$; R* = {(1,2)}.
  Pak R* je modelem, ale není řešením rovnice.

Využití rekurzivního Datalogu ve webových službách

Předpoklad: webové zdroje s dotazováním, které umožňuje formulovat vždy nějakou podmnožinu konjunktivních dotazů.

Př.: Amazon – zadáme jména autora a obdržíme seznam jeho knih. Dotaz na všechny dostupné knihy není možný.

Př.: Cestovní služba se zdrojovými relacemi **R**:

lety(start, cíl), vlaky(start, cíl),

autobusy(start, cíl), kyvadl_dopr (start, cíl)

Využití rekurzivního Datalogu ve webových službách

Datalogický program rozšiřuje možnosti konjuktivních dotazů generováním pohledů s rekurzí, např. program P

ans(a, b) :- lety(a,c), ind(c,b)

ind(c,b) :- lety(c,b), autobusy(b, Praha)

ind(c,b) :- lety(c,c'), ind(c',b)

Pz.: z P ovšem nezjistíme žádným způsobem, zdali je Praha dosažitelná odněkud někam s leteckým přestupem a dále kyvadlovou dopravou.

Rozšíření DATALOGu o negaci

Př.: NSR(x,y) … x je příbuzný y, ale není sourozencem y

NSR(x,y) :- R(x,y), ¬S'(x,y)

NSR* = R* - S'*

nebo

NSR(X,Y) = R(X,Y) * <u>S'</u>(X,Y), kde <u>S'</u> je doplněk do nějakého vhodného univerza.

Postup:

- umožníme negaci v těle pravidla, tj. negativní literály mezi $L_1,\ldots,L_n$
- bezpečná pravidla musí mít omezené proměnné, tj. zakážeme proměnné, které jsou v negativním literálu a nejsou omezené ve smyslu původní definice.

Rozšíření DATALOGu o negaci

Problém:

ŘEŠENÍM LOGICKÉHO PROGRAMU NEMUSÍ BÝT NPB, ALE NĚKOLIK MPB.

Př.: NUDNÝ(x) :- ¬ ZAJÍMAVÝ(x), MUŽ(x)

ZAJÍMAVÝ(x) :- ¬ NUDNÝ(x), MUŽ(x)

N(X) = M(X) - Z(X)

Z(X) = M(X) - N(X)

Rešení: Nechť M = {Honza}

M1: {NUDNÝ* = {Honza}, ZAJÍMAVÝ* = ∅}

M2: {ZAJÍMAVÝ* = {Honza}, NUDNÝ* = ∅}

Stratifikovaný DATALOG¬

- není pravda, že jeden model je menší než druhý,
- neexistuje žádný model menší než M1 nebo M2

⇒ máme dva minimální modely

Intuice: omezení negace - použije-li se, pak na již známou relaci, tj. relace musí nejprve být definovány (event. rekurzivně) bez negace, Pak nová relace může být definována pomocí nich bez nebo s negacemi.

Df.: *Definice virtuální relace* S je množina všech pravidel, které mají S v hlavě.

Df.: S se vyskytuje v pravidlu *pozitivně* (*negativně*), je-li obsažena v pozitivním (negativním) literálu.

Stratifikovaný DATALOG$^{\neg}$

Df: Program P je *stratifikovatelný*, jestliže existuje dělení $P = P_1 \cup \ldots \cup P_n$ (P_i jsou navzájem disjunktní) takové, že pro každé $i \in \langle 1,n \rangle$ platí:

1. Vyskytuje-li se relační symbol S pozitivně v nějakém pravidle z P_i, pak definice S je obsažena v $\cup_{j \leq i} P_j$
2. Vyskytuje-li se relační symbol S negativně v nějakém pravidle z P_i, pak definice S je obsažena v $\cup_{j < i} P_j$

   (P_1 může být $\emptyset$)

Df.: Dělění $P_1, \ldots, P_n$ se nazývá *stratifikace* P, každé P_i je *stratum*.

Terminologie: stratifikace … rozvrstvení

stratum … vrstva

Stratifikovaný DATALOG$^{\neg}$

Př.: Program $P(x) :- \neg Q(x)$ (1)

$R(1)$ (2)

$Q(x) :- Q(x), \neg R(x)$ (3)

je stratifikovatelný. Stratifikace: $\{(2)\} \cup \{(3)\} \cup \{(1)\}$

Program $P(x) :- \neg Q(x)$

$Q(x) :- \neg P(x)$

není stratifikovatelný.

Df.: Nechť (U,V) je hrana závislostního grafu. (U,V) je *positivní* (*negativní*), existuje-li pravidlo V:- … U … a U se tam vyskytuje positivně (negativně).

Pz.: Hrana může být positivní i negativní.

Stratifikovaný DATALOG$^{\neg}$

Tv.: Program P je stratifikovatelný právě když jeho závislostní graf neobsahuje cyklus s negativní hranou.

Důkaz: $\Rightarrow$ Každá virtuální relace P má přiřazen index strata, ve kterém je definována. Tedy (P,Q) je pozitivní $\Rightarrow$ index(P) $\leq$ index(Q)

(P,Q) je negativní $\Rightarrow$ index(P) < index(Q)

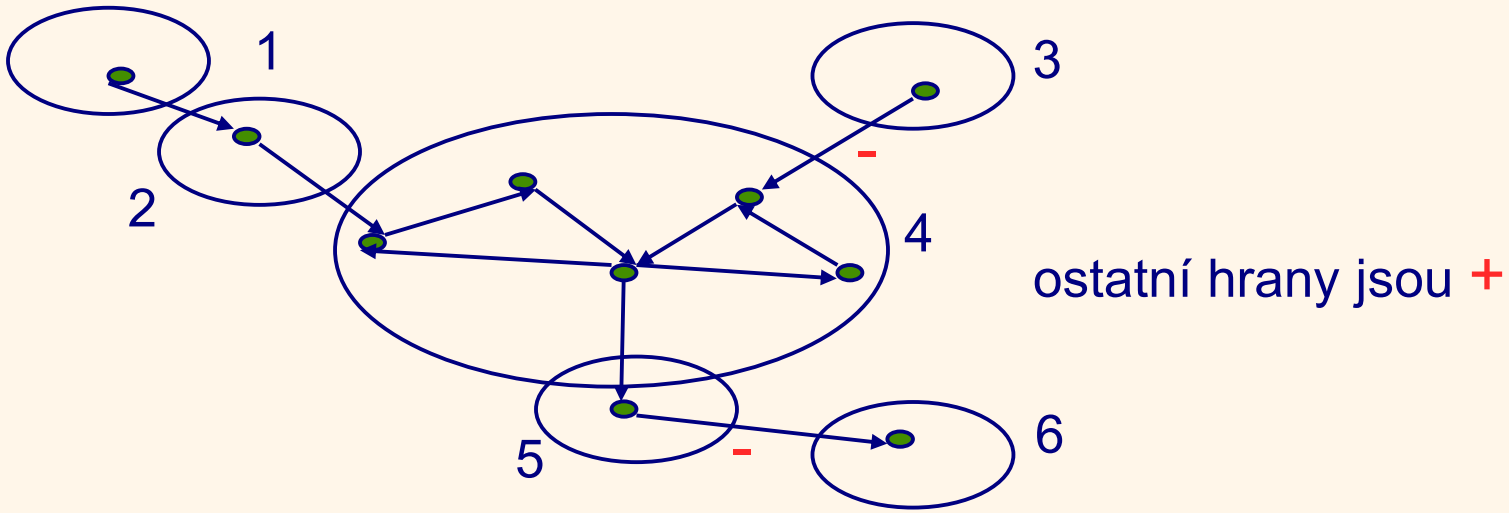
Kdyby existoval cyklus s negativní hranou, existoval by uzel X, kde index(X) < index(X), což je spor.

$\Leftarrow$ dekomponujeme závislostní graf na silně souvislé komponenty, provedeme kondenzaci grafu, která je acyklická, a přiřadíme topologické upořádání komponentám.

Stratifikovaný DATALOG¬

Každá z komponent definuje jedno stratum, uspořádání definuje jejich očíslování. Protože negativní hrany jsou nejvýše mezi komponentami, tvoří pravidla odpovídající komponentě stratum.

Př.:



Stratifikovaný DATALOG$^{\neg}$

Předpoklady: pravidla jsou bezpečná, rektifikovaná.

adom … sjednocení konstant z EDB a IDB

$\neg$ $Q(x_1,\ldots,x_n)$ se transformuje na (*adom* $\times\ldots\times$ *adom*) - Q*

Algoritmus: **vyhodnocení stratifikovatelného programu**

Vstup: EDB = $\{R_1,\ldots,R_k\}$, IDB = {pravidla pro $P_1,\ldots,P_n$},

Výstup: minimální pevný bod $P_1^*,\ldots,P_n^*$

Metoda: Najdi stratifikaci programu; spočti *adom*;

<u>for</u> i:=1 <u>to</u> s <u>do</u> *{s strat}*

<u>begin</u> { pro stratum *i* existují relace spočtené ze strat *j*, kde *j<i}*

  <u>if</u> ve stratu *i* je Q pozitivní <u>then</u> použij Q;

  <u>if</u> ve stratu *i* je Q negativní <u>then</u> použij *adom* ^{n} - Q;

  použij algoritmus pro výpočet NPB

<u>end</u>

Stratifikovaný DATALOG¬

Tv.: Vyhodnocovací algoritmus se zastaví a dá MPB soustavy datalogických rovnic.

Důkaz: PB plyne indukcí podle úrovní

Pz: program stratifikovaného DATALOG¬u může mít více MPB.

Stratifikovaný DATALOG¬

EDB: Díl(součástka, podsoučástka, množství)

trojkolka	kolo,	3
trojkolka	rám	1
rám	sedadlo	1
rám	pedál,	2
kolo	ráfek,	1
kolo,	pneu	1
pneu	ventilek	1
pneu	duše,	1

IDB

Velký(P) :- Díl(P,S,Q), Q > 2

Malý(P) :- Díl(P,S,Q), ¬ Velký(P)

Stratifikace a výsledný MPB:

Stratum 0: Díl

Stratum 1: Velký Velký = {trojkolka}

Stratum 2: Malý Malý = {rám, kolo, pneumatika}

Ale: Relace Malý={trojkolka, rám, kolo, duše}, Velký={} tvoří další MPB tohoto programu, ačkoliv není výsledkem stratifikovaného vyhodnocení.

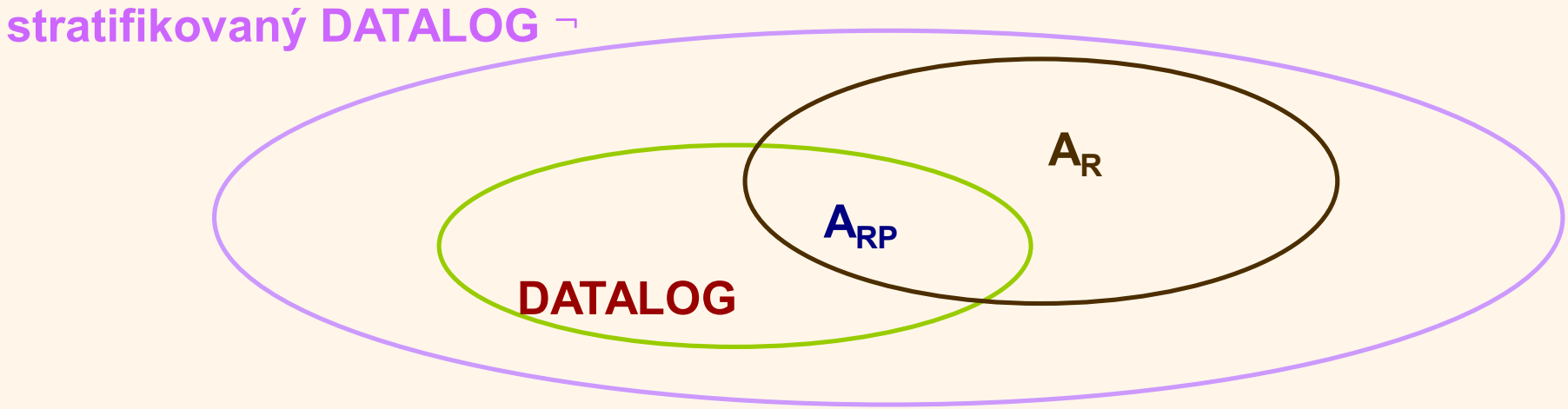
Stratifikovaný DATALOG$^{\neg}$

Pz.: Stratifikovatelný program má obecně více stratifikací. Ty jsou ekvivalentní, tj. vyhodnocení vede ke stejnému MPB (Apt, 1986).

Tv.: Nerekurzivní programy DATALOGu vyjadřují právě ty dotazy, které jsou vyjádřitelné monotónní podmnožinou A_R.

Pz.: *pozitivní relační algebra* A_{RP} $\{\times, \cup, [\ ], \varphi\}$.

Stratifikovaný DATALOG¬



Relační algebra a DATALOG¬

Tv.: Nerekurzivní programy DATALOG¬u vyjadřují právě ty dotazy, které jsou vyjádřitelné v A_R.

Důkaz: $\Leftarrow$ indukcí dle počtu operátorů v E

1. $\emptyset$ operátorů: $E \equiv R$ R je z EDB

   $E \equiv$ konst. relace

   pak pro každou n-tici přidej $p(a_1,\ldots,a_n)$ do EDB. Nic do IDB

2. $E \equiv E_1 \cup E_2$

   dle indukční hypotézy existují programy pro E_1 a E_2 (odpovídající predikáty e_1 a e_2)

   $e(x_1,\ldots,x_n)$:- $e_1(x_1,\ldots,x_n)$

   $e(x_1,\ldots,x_n)$:- $e_2(x_1,\ldots,x_n)$

Relační algebra a DATALOG$^{\neg}$

3. $E \equiv E_1 - E_2$

   $e(x_1,\ldots,x_n)$:- $e_1(x_1,\ldots,x_n)$, $\neg$ $e_2(x_1,\ldots,x_n)$

4. $E \equiv E_1[i_1,\ldots,i_k]$

   $e(x_{i1},\ldots,x_{ik})$:- $e_1(x_1,\ldots,x_n)$,

5. $E \equiv E_1 \times E_2$

   $e(x_1,\ldots,x_{n+m})$:- $e_1(x_1,\ldots,x_n)$, $e_2(x_{n+1},\ldots,x_{n+m})$

5. $E \equiv E_1(\varphi)$

   $e(x_1,\ldots,x_n)$:- $e_1(x_1,\ldots,x_n)$, $x_{ij}= x_{ik}$ nebo $x_{ij}= a$

$\Rightarrow$ z nerekurzivity; topologické uspořádání + $adom^n$ - *Q* pro negaci. Pro každou *P* definovanou v IDB lze zkonstruovat výraz v A_R . Dosazováním (podle uspořádání) obdržíme relační výrazy závisející jenom na relacích z EDB.

Relační algebra a DATALOG¬

Př.: *vytvoření programu z relačního výrazu*

MŮŽE_KOUPIT(X,Y) ≡

LÍBÍ_SE(X,Y) - (DLUŽNÍK(X) × LÍBÍ_SE(X,Y)[Y])

EDB: LÍBÍ_SE(X,Y) osobě X se líbí předmět Y

DLUŽNÍK(X) osoba X je dlužníkem

označme DLUŽNÍK(X) × LÍBÍ_SE(X,Y)[Y] jako D_P_PÁR(X,Y).

Pak dalogický program pro MŮŽE_KOUPIT je:

JE_OBDIVOVÁN(y) :- LÍBÍ_SE(x,y)

D_P_PÁR(x,y):-DLUŽNÍK(x), JE_OBDIVOVÁN(y)

MŮŽE_KOUPIT(x,y) :- LÍBÍ_SE(x,y), ¬ D_P_PÁR(x,y)

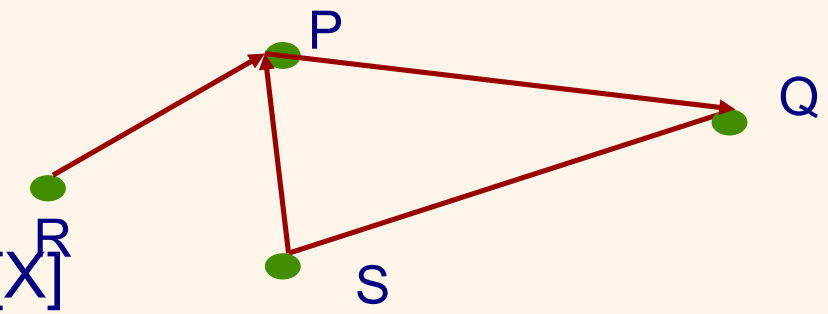
Relační algebra a DATALOG$^{\neg}$

Př.: *vytvoření relačního výrazu z programu*

EDB: R^*, S^*, *adom* $\equiv R[X] \cup R[Y] \cup S$

P(x) :- R(x,y), $\neg$S(y)

Q(z) :- S(z), $\neg$P(z)



$P(X) \equiv (R(X,Y) * \{adom - S\}(Y))[X]$

$Q(Z) \equiv S(Z) * \{adom - P\}(Z) \equiv (S \cap \{adom - P\})(Z)$

Protože $S \subset adom$, platí $Q(Z) \equiv S(Z) - P(Z)$. Po substituci za P

$Q(Z) \equiv S(Z) - (R(Z,Y) * \{adom - S\}(Y))[Z]$

Pz.: *adom* lze nahradit R[Y]

Pz.: logicky program vede k jedné výsledné relaci.

Obecněji: více (nezávislých) relací $\Rightarrow$ více relačních výrazů

Předpoklad uzavřeného světa (1)

Př.: $S'(y,w) := F(x,y), F(x,w), y \neq w$

Je-li F^* taková, že nejde odvodit S´(Jánošík,Babinský), pak lze prohlásit $\neg$S´(Jánošík,Babinský)

Pz.: Nejde o důkaz!

Df.: Uvažujme Hornovy klauzule (bez $\neg$). *Předpoklad uzavřeného světa* (CWA) říká: kdykoliv tvrzení $R(a_1,...,a_k)$ není odvoditelné z EDB a pravidel, pak $\neg R(a_1,...,a_k)$.

Pz.: CWA je metapravidlo k odvozování negativní informace.

Značení: $\models_{CWA}$

Předpoklad uzavřeného světa (2)

Předpoklady pro použití CWA:

(1) Různé konstanty neoznačují tentýž objekt

Př.: F(Jiří, Kato), F(Jiří, Jánošík) $\Rightarrow$ S'(Kato, Jánošík)

Jsou-li Kato a Jánošík jména téhož agenta obdržíme nesmysl

(2) Doména je uzavřená (konstanty z EDB+IDB)

Př.: jinak by nešlo odvodit $\neg$S´(Jánošík,Babinský;

(mohli by mít otce "mimo" databázi).

Tv.: (o konzistenci CWA): Nechť *E* je množina tvrzení z EDB, *I* je množina tvrzení odvoditelná datalogickým programem IDB$\cup$EDB, *J* je množina tvrzení tvaru $\neg$ R(a_1,...,a_k) , kde R je predikátový symbol z IDB$\cup$EDB a R(a_1,...,a_k) není v $I \cup E$. Pak $I \cup E \cup J$ je logicky konzistentní.

Předpoklad uzavřeného světa (3)

Důkaz: Nechť $K = I \cup E \cup J$ není konzistentní. $\Rightarrow \exists$ pravidlo $p(...)\text{:-}q_1(...),...,q_k(...)$ a substituce taková, že tvrzení na pravé straně pravidla jsou v K a odvozené tvrzení není v K. Protože tvrzení z pravé strany jsou pozitivní literály, jsou z $I \cup E$ a ne z J. Pak ale literál z hlavy pravidla musí být z I (je odvoditelný pomocí NPB), což je spor.

Pz.: DATALOG$^{\neg}$ nelze vybudovat na základě CWA.

Př.: Uvažujme program

LP: NUDNÝ(Emil) :- $\neg$ZAJÍMAVÝ(Emil)

tj. $\neg$ZAJÍMAVÝ(Emil) $\Rightarrow$ NUDNÝ(Emil) což je $\Leftrightarrow$

ZAJÍMAVÝ(Emil) $\vee$ NUDNÝ(Emil) a tedy ani ZAJÍMAVÝ(Emil) ani NUDNÝ(Emil) nelze z LP odvodit.

Předpoklad uzavřeného světa (4)

$LP \models^{CWA} \neg$ ZAJÍMAVÝ(Emil)

$LP \models^{CWA} \neg$ NUDNÝ(Emil)

Žádný model LP ale nemůže obsahovat

$\{\neg$ ZAJÍMAVÝ(Emil),$\neg$NUDNÝ(Emil)$\}$

$\Rightarrow$ DATALOG$^{\neg}$ není konsistentní s CWA.

Pz.: LP má dva minimální modely:

$\{$NUDNÝ(Emil)$\}$ a ZAJÍMAVÝ$\{$(Emil)$\}$

Stratifikace řeší příklad přirozeně:

$EDB_{LP} = \emptyset$

nejprve se spočítá ZAJÍMAVÝ, což jest $\emptyset$, pak NUDNÝ= $\{$Emil$\}$,

tj. je vybrán minimální model $\{$NUDNÝ(Emil)$\}$

Předpoklad uzavřeného světa (5)

Uvažujme program

P': ZAJÍMAVÝ(Emil) :- $\neg$ NUDNÝ(Emil)

tj. $\neg$ NUDNÝ(Emil) $\Rightarrow$ ZAJÍMAVÝ(Emil) což je $\Leftrightarrow$
ZAJÍMAVÝ(Emil) $\vee$ NUDNÝ(Emil)

Stratifikace vybere model {ZAJÍMAVÝ(Emil)}

Deduktivní databáze (1)

Neformálně: EDB $\cup$ IDB $\cup$ IO

Diskuse klauzulí: *klauzule* je univerzálně kvantifikovaná disjukce literálů

$\neg L_1 \vee \neg L_2 \vee \ldots \vee \neg L_k \vee K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_p \qquad (\Leftrightarrow)$

$L_1 \wedge L_2 \wedge \ldots \wedge L_k \Rightarrow K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_p$

Pz.: v DATALOGu p=1

(i) k=0, p=1:

tvrzení, např. zam(Jiří), vydělává(Tom,8000)

neomezené klauzule, např. má_rád(Bůh,x)

(ii) k=1, p=0:

negativní tvrzení, např. $\neg$ vydělává(Eda,8000)

IO, např. $\neg$ má_rád(Jan,x)

Deduktivní databáze (2)

(iii) $k>1$, $p=0$:

IO, např. $\forall x\ (\neg M(x) \vee \neg Ž(x))$

(iv) $k>1$, $p=1$: jde o Hornovskou klauzuli

IO nebo odvozovací pravidlo

(v) $k=0$, $p>1$:

disjunktivní informace, např. $M(x) \vee Ž(x)$,

vydělává(Eda,8000) $\vee$ vydělává(Eda,9000)

(vi) $k>0$, $p>1$:

IO nebo definice neurčitých dat, např. otec

rodič(x,y) $\Rightarrow$ otec(x,y) $\vee$ matka(x,y)

(vii) $k=0$, $p=0$:

prázdná klauzule (neměla by být částí databáze)

Deduktivní databáze (3)

df.: *Definitní* (*určitá*) *deduktivní databáze* je množina klauzulí, které nejsou typu (v) a (vi). Databáze obsahující (v) nebo (vi) je *nedefinitní* (*neurčitá*).

Definitní deduktivní databázi lze chápat jako dvojici

1. teorii T, která obsahuje speciální axiomy:
   - tvrzení (odpovídají n-ticím z EDB)
   - axiomy o prvcích:
     - úplnosti (neplatí jiná tvrzení než ta z EDB a ta odvoditelná pravidly)
     - axiom uzavřenosti domén
     - axiom jednoznačnosti jmen
   - axiomy rovnosti
   - množina Hornových klauzulí (*deduktivní pravidla*)
2. IO

Deduktivní databáze (4)

Pro definitní deduktivní db lze použít CWA.

Pz.: odstraní nutnost použít axiomy úplnosti a axiom jednoznačnosti jmen $\Rightarrow$ jednodušší implementace

Tv.: Definitní deduktivní db je konzistentní.

- *odpověď na dotaz* $Q(x_1,...,x_k)$ v deduktivní db je množina n-tic $(a_1,...,a_k)$ takových, že

  $T \models Q(a_1,...,a_k)$,
- deduktivní databáze *splňuje* IO iff $\forall\, c \in$ IO $T \models c$.

Pz.: je-li formální systém korektní a úplný, pak $\vdash$ je totéž jako $\models$.

Korektnost IS (1)

DB vs. reálný svět (*svět objektů*)

Požadavky:

- konsistence

  nelze dokázat současně w i ¬ w
- splnitelnost ve světě objektů

  databáze je v souladu se světem objektů
- úplnost

  v systému lze dokázat, že buď w nebo ¬ w

Korektnost IS (2)

Př.: problémy se vztahem ke světu objektů

Sch1: zam(.), plat(.), vydělává(.,.)

IO: $\forall$ x (zam(x) $\Rightarrow \exists$ y (plat(y) $\wedge$ vydělává(x,y))

M1: zam: {Jiří, Karel}, plat:{19500, 16700}

vydělává: { (Jiří, 19500), (Karel, 16700)},

M2: vydělává INSERT: (19500, 16700)

Sch2: zam(.), plat(.), vydělává(.,.)

IO: $\forall$x $\exists$y (zam(x) $\Rightarrow$ vydělává(x,y))

$\forall$x $\forall$y(vydělává(x,y) $\Rightarrow$ (zam(x) $\wedge$ plat(y)))

M2 není modelem

Dosažení konsistence: konstrukce modelu

IO (1)

IO jako uzavřené formule.

Problémy: konzistence

neredundantnost

Př.: funkční závislosti

- v jazyku logiky 1. řádu

  $\forall a,b,c_1,c_2,d_1,d_2$

  $((R(a,b,c_1,d_1) \wedge R(a,b,c_2,d_2) \Rightarrow c_1 = c_2))$

- v teorii FZ

  $AB \rightarrow C$

Neredundantnost se zkoumá pomocí řešení problému příslušnosti;

IO (2)

Obecné závislosti

$\forall y_1,\ldots,y_k \exists x_1,\ldots,x_m((A_1 \wedge \ldots \wedge A_p) \Rightarrow (B_1 \wedge \ldots \wedge B_q))$

kde $k, p, q \geq 1$, $m \geq 0$,

A_i … pozitivní literály s proměnnými z $\{y_1,\ldots,y_k\}$

B_i … rovnosti nebo pozitivní literály s proměnnými z $\{y_1,\ldots,y_k\} \cup \{x_1,\ldots,x_m\}$

$m = 0$ … *plné závislosti*

IO (3)

Klasifikace závislostí:

- typované (1 proměnná není ve více sloupcích)
- plné, vnořené
- generující řádky, generující rovnosti
- funkční

  inkluzní (obecně jsou vnořené, netypované)

  šablonové (q=1, B je pozitivní literál)

Obecné závislosti - příklad

VNOŘENÁ, GENERUJÍCÍ ŘÁDKY

$\forall x\ (zam(x) \Rightarrow \exists y\ (plat(y) \wedge vydělává\ (x,y))$

PLNÁ, GENERUJÍCÍ ROVNOSTI, FUNKČNÍ

$\forall x, y_1, y_2 (vydělává(x,y_1) \wedge vydělává(x,y_2) \Rightarrow y_1 = y_2)$

PLNÁ, GENERUJÍCÍ ŘÁDKY, INKLUZNÍ

$\forall x, z\ (vede(x,z) \Rightarrow zam(x))$

PLNÁ OBECNĚJŠÍ

$\forall x,y,z\ (vydělává(x,y) \wedge vede(x,z) \Rightarrow y > 5000)$

VNOŘENÁ, GENERUJÍCÍ ŘÁDKY, INKLUZNÍ

$\forall x, z\ (vede(x,z) \Rightarrow \exists y\ (řeší(x,y)\ ))$

VNOŘENÁ, GENERUJÍCÍ ŘÁDKY, ŠABLONOVÁ

$\forall x,y,z\ ((vede(x,z) \wedge řeší(x,y)) \Rightarrow \exists o\ je_č(x,o)\ )$

Tvrzení o závislostech (1)

Tv: Nejlepší procedura řešící problém příslušnosti ke třídě typovaných plných závislostí má exponenciální časovou složitost.

Pz.: Problém příslušnosti pro plné závislosti je týž pro konečné i nekonečné relace.

Př.: $\Sigma = \{A \rightarrow B, A \subseteq B\}$

τ: $B \subseteq A$

Platí: $\Sigma \models_f \tau$ $\qquad$ $\Sigma \not\models \tau$

např. na relaci $\{(i+1,i): i \geq 0\}$

Tvrzení o závislostech (2)

Tv.: Problémy příslušnosti pro obecné závislosti nejsou ekvivalentní pro konečné a nekonečné relace. Oba problémy jsou neřešitelné.

Tv.: Problémy příslušnosti pro FZ a IZ je neřešitelný.

Tv.: Nechť Σ obsahuje pouze FZ a unární IZ. Pak problém příslušnosti pro konečné i nekonečné relace je řešitelný v polynomiálním čase.

Tvrzení o závislostech (3)

Závěr: je-li exponenciální čas ještě únosný pro současné a budoucí počítače, jsou plné závislosti nejširší třídou upotřebitelnou pro deduktivní databáze.

$\Rightarrow$ významné místo Hornových klauzulí v informatice.

Pesimistický pohled:

- obecně nelze dosáhnout úplnosti
- obecně nelze dosáhnout konzistence

  (vadí algoritmická složitost, kterou někdy nejde zlepšit a mnohdy ani řešit - chybí odpovídající dokazovací procedura)

Tvrzení o závislostech (4)

- omezení umožní sice konzistenci, avšak odpovídající modely neodpovídají reálnému světu

Optimistický pohled:

- pesimistické výsledky jsou obecné. Jaké jsou množiny reálných závislostí?

Problémy DJ

- 1982: Chandra a Harel postavili problém:

  Existuje dotazovací jazyk (logika), kterým lze vyjádřit právě všechny dotazy vyhodnotitelné v polynomiálním čase (PTIME)?

  Odpověď: dosud neznámá.
- 1982 Immerman, Vardi dokázali, že rozšíření logiky 1. řádu (FO) o operátor NPB (FP) to umožňuje na třídě všech upořádaných konečných struktur
- Další přiblížení: FP+C (operátor counting). Umožňuje podchytit PTIME např. na všech stromech, planárních grafech a dalších.
  - Pz.: counting umožnuje zjistit počet prvků vyhovujících formuli